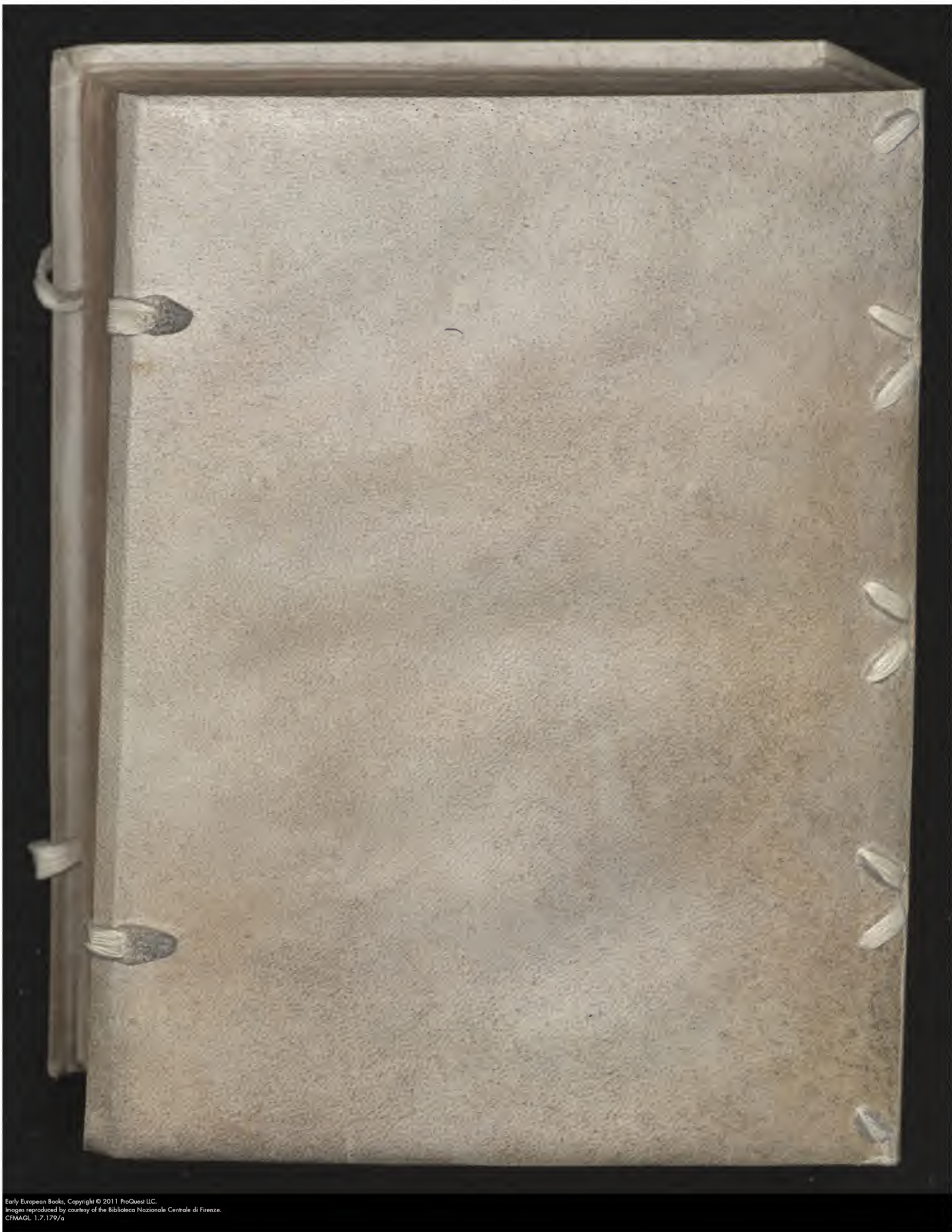
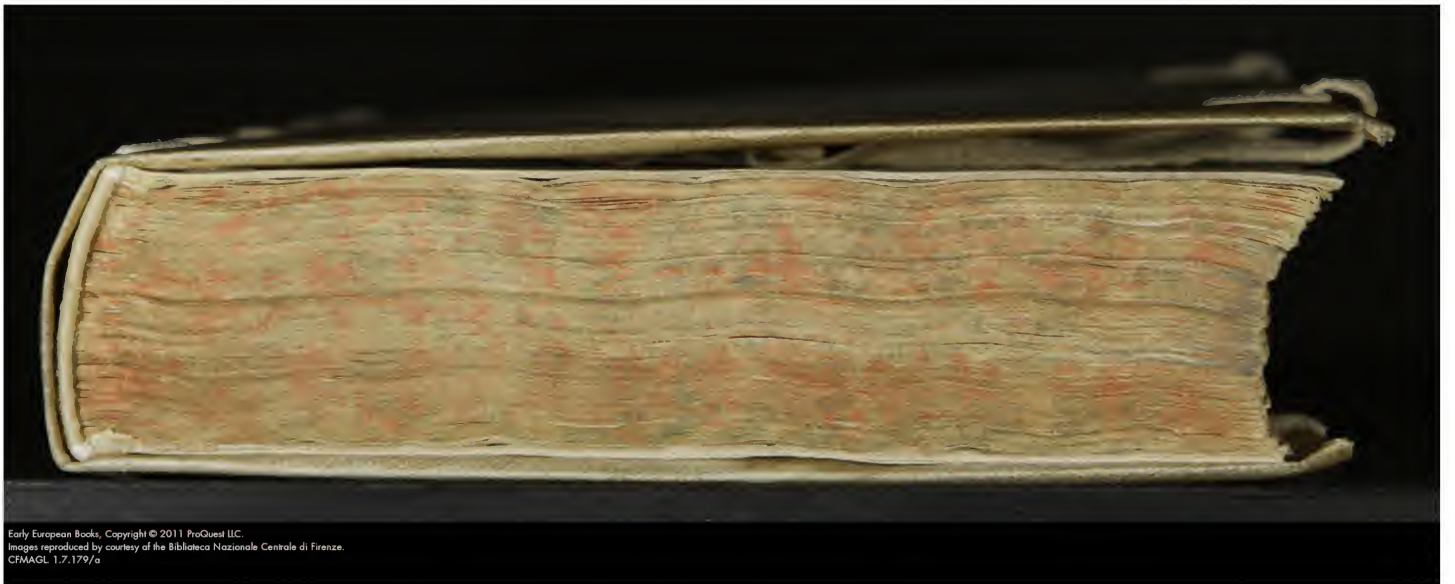


Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CIVICOL 1.7.179/a

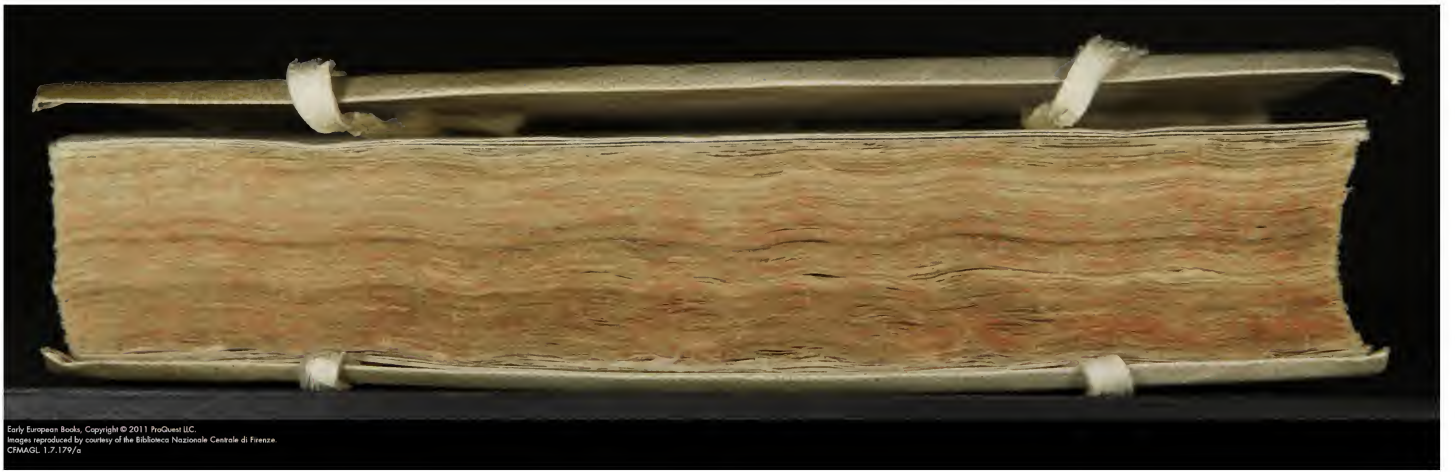




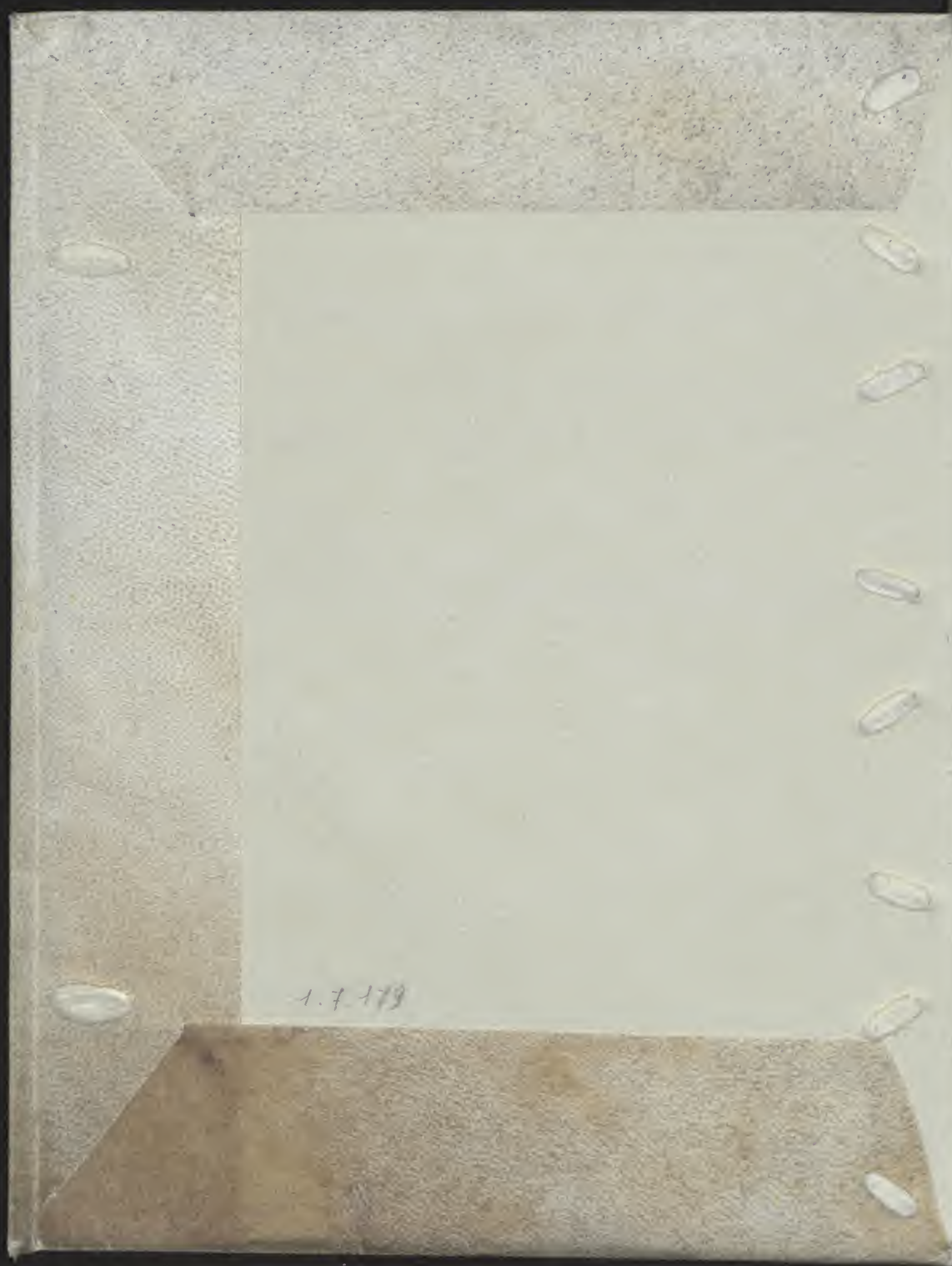
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.179/a

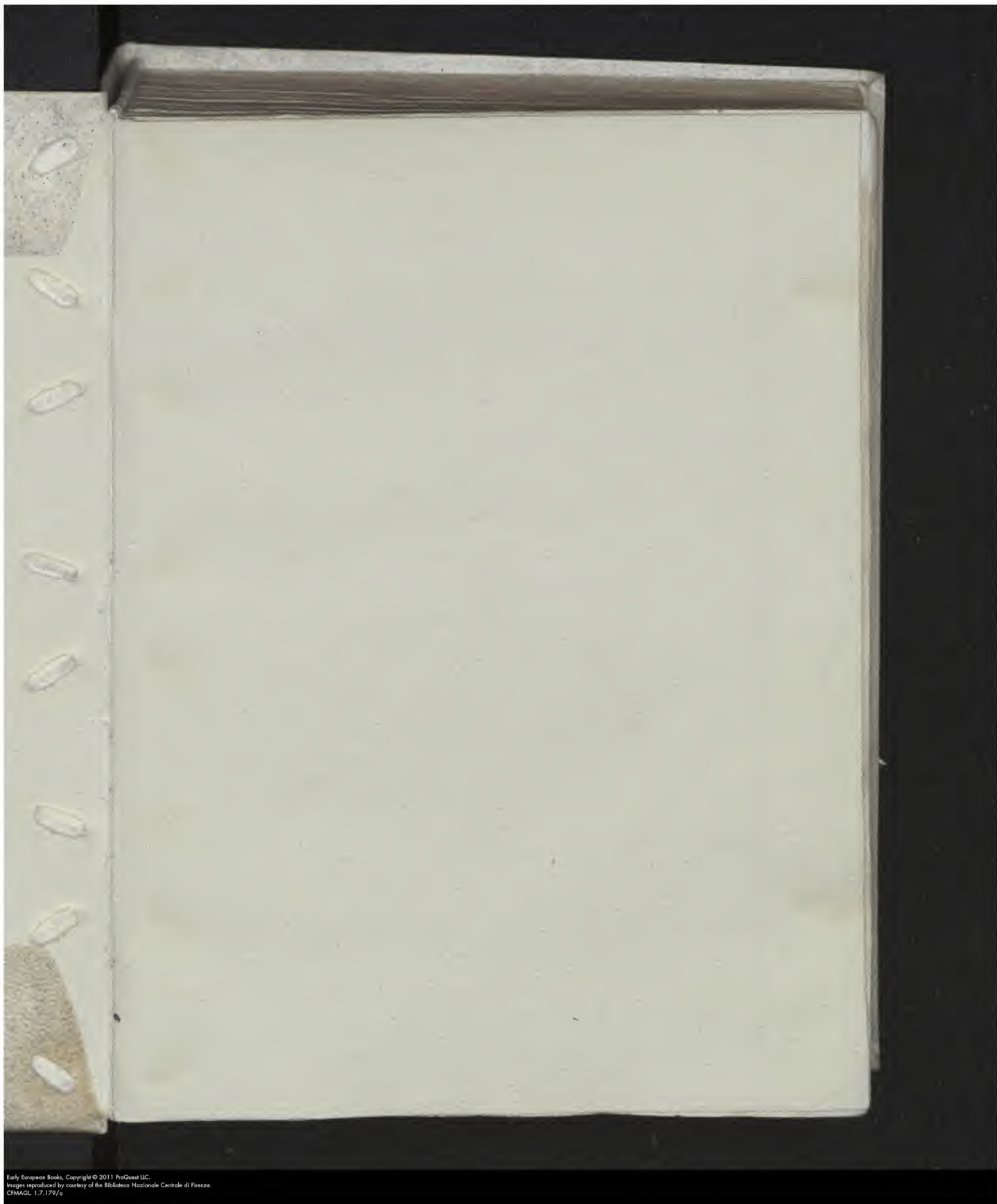


Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.179/a

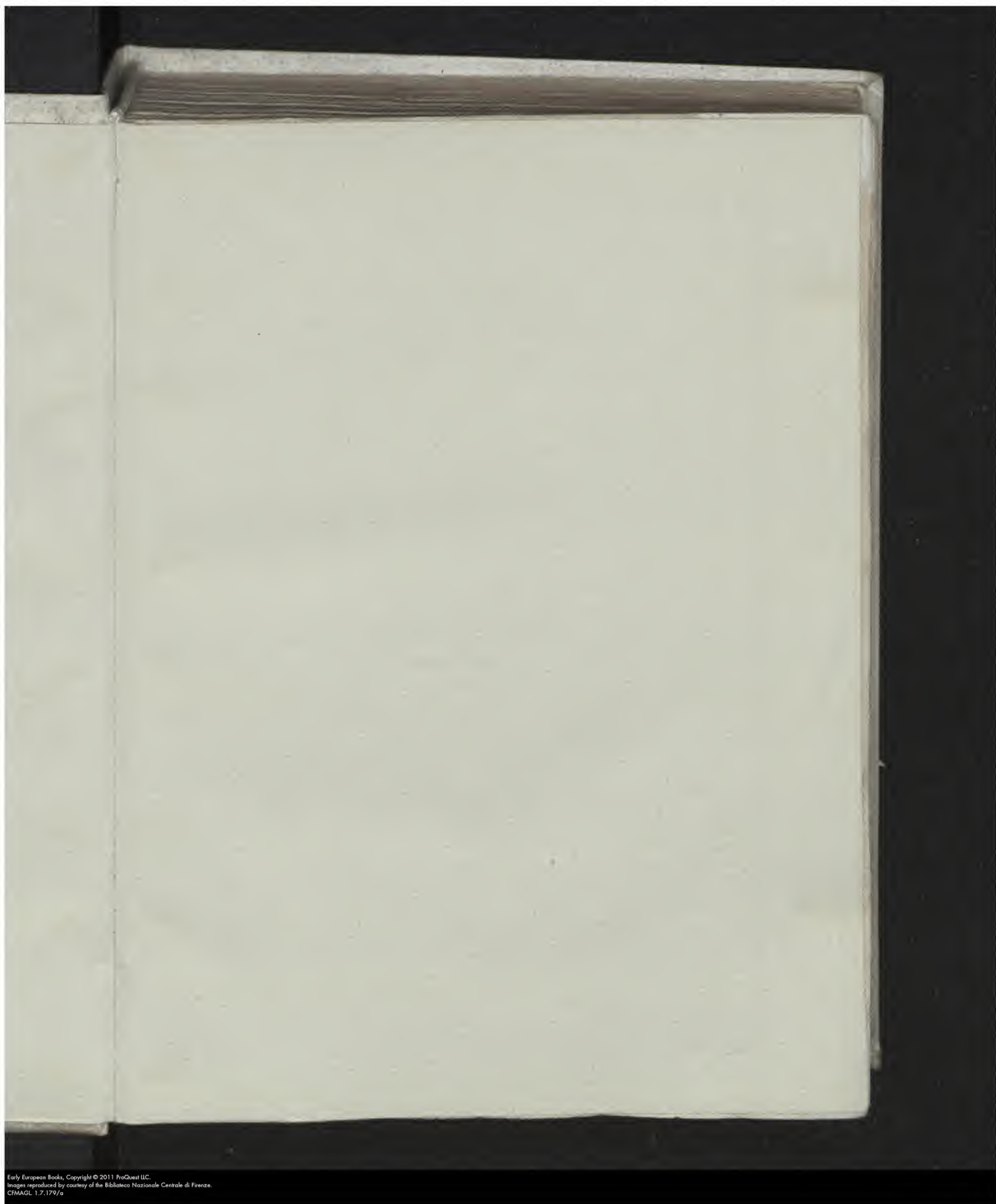


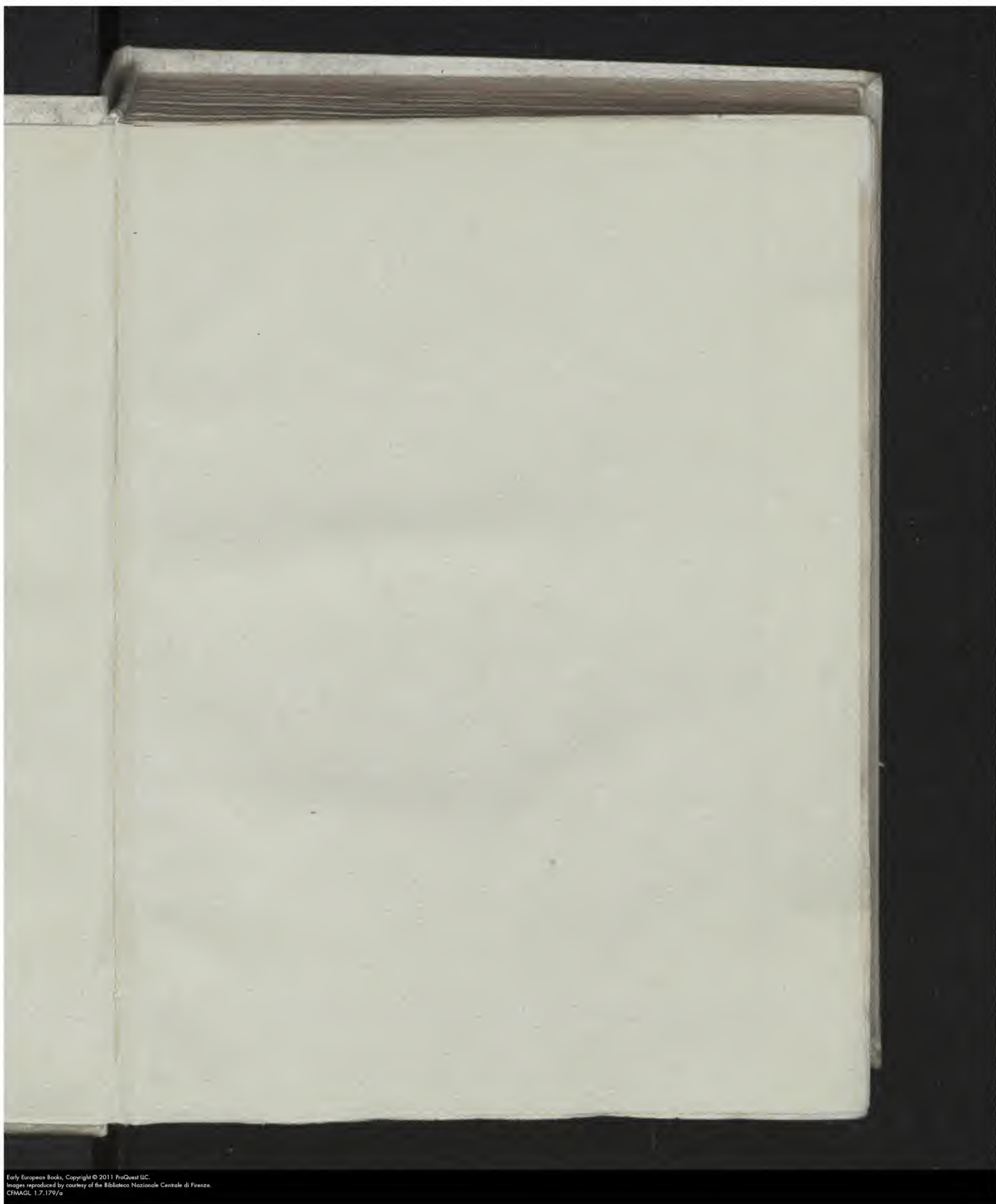
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CINACOL 1.7.172/c



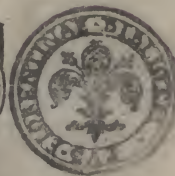


1. 7. 179





P. RAMI ARITH-
METICAE LIBRI
DVO: GEOMETRIAE
SEPTEM ET VIGINTI.



BASILEAE, PER EVSEBIVM
Episcopium, & Nicolai fratris heredes.
ANNO M. D. LXIX.



P RAMVS LE
CTORI S.



X omnibus vigiliis (Lector) multos per annos in artium liberalium institutione elucubrat is nihil elementis mathematicis, nobis aequè vel exercitii laboribus, vel anxium curis, vel periculosum temporibus accidit. Nam cum à primis annis mathematicum amore captus, Orontio Fineo (qui primus regia professione in Galliam mathematicas artes retulit) operam dedissem, protinus abdu-
ctum rhetorica & philosophica exercitationes occuparunt: Interea tamen Ioannem Penam nostrae disciplinae alumnum nactus mathematici oneris fasce me sublevatum & exoneratum putari. Adolescens enim fuit ingenio quidem ad omnes artes percipiendum mirabili, studio autem in literis latinis & graecis, in philosophia praecipuè & mathematica tanto, ut ardentius aut flagrantius nihil unquam viderim. Quare cum mathematica professio vacaret, & à nobis in examē productus, emulatione competitorum se verius examinatus esset, ita mentes omnium cepit, ut etiam ad versarii eo loco dignissimum iudicarent. Ergo commendatione tam raræ eruditionis professor factus, cum nostris consiliis excitatus spem mathematica illustrationis incredibilem concitasset, anno ætatis sexto & vicesimo in ipsa professione pene vestibulo extinctus est, magno mœrore nostro, magnoq; mathematicarum rerum detrimento. Itaq; cum de physicis iam cogitarem, saxum idem rursus humeris nostris impositum, animo potius quam robore sustinui. Auxilia undique exquisivi. P. Forcatelus (quod in mercatore Hippocrate mirum fuisse alibi scripsimus) sine literatura, sine philosophia, solo ingenio atq; usu quodam mathematicus sesquiannum apud nos fuit. Hoc ad iumentum usus cum Euclidem totum accuratè observassem, ecce bellici civilis calamitas, fuga civium, bibliothecæ direptio, frustra q; labores euclidei: Verum pace restituta, interim dum Grammaticam, Rhetoricā, Dialecticam recoquimus, reliquias naufragii recolligere libuit, & per Cardinalem

nalem Castellonium parisiensis academiae id est omnis doctrinae conservatorem Forcatelo (cum alter mathematicum professor defunctus esset) mathematicam professionem procurare: ut gallica saltem lingua gallicam juventutem exercendo regii collegii columnam istam qua posset, facultate tueretur. Antecedentibus igitur studiis illis expeditis Euclides de integro repetitus est, & diligentius quam antea disceptatus: Interea q^{ue} Federicus Resnerus germanus nobis adfuit, qui quid in literis & mathematicis posset, propediem suo Marte in Opticis Alaceni & Vitellonis declarabit. Atq^{ue} hac secunda aggressio cum strenue procederet, insania furiosorum humano sanguine nondum satiatorum rursus erupit, nec propius quicquam fuit, quam abjectis ceteris cogitationibus saluti consulere, id fuit in optimatum castra confugere, & pro diagrammatis radio descriptis urbes ferro flammaq^{ue} deletas, strages totis campis miserabiles, praelium deniq^{ue} longe omnium acerrimum spectare. Quid enim parisiensi praelio simile vel Marathon Periclis vel Salamis Themistoclis habuit? Sed hac matheſis alio problemate describetur. Tempeſtas sexto post mense sedata est, domum reuersus nil in bibliotheca prater inania pulpita reperi. Resnerus noster (qui Lutetia permansisset) e' praeſonum manibus mathematicas commentationes auerterat. At vix domum reuersus videri poteram, cum jam tertiam tempeſtatem non obscurae nubes caelum intuentibus monstrarent. Cumq^{ue} Iulianus alter edicto ad omnia academiae compita per falsum regis nomen publicato (rex enim Christianissimus, ubi per senatum hac indignitate commotum rescivit, indignissime tulit) cum Iulianus (inquam) alter iterum christianos scholis prohiberet: imo vero quod apostata ille nunquam cogitarat, armis expelleret. Itaq^{ue} ne tertio naufragio funditus periremus, impetrari ab humanissimo rege annuae ad Europae nobiles academias peregrinationis tanquam legationem liberam, e' mediaq^{ue} flamma mathematicos illos omnium rerum longe charissimos penates in Germaniam abripui. In extremis tamen regni finibus cum brevia & syrtes praeſectus mihi viderer, duodecim equites e' iugo montis decurrentes animadverti, eademq^{ue} intentans

PRAEFATIO.

intentantibus & Condei principis consiliarium hostiliter inclamantibus ultro occurri, & diplomate regij commeatus tantisper repressos docui longè alio nos apud regem esse numero locoque quàm ipsis esset persuasum, aliàsque tali tempore accommodata differui. Ter dimissus, ter repetitus, tandem velocitate summa eò perveni, ubi sicarijs licentia nequaquam par esset. Deinceps tutus & letus in Germaniam adventus bonorum ac doctorum omnium (quibus adhuc occurrimus) singulari humanitate & gratulatione exceptus est. Hoc sacrum mathematici asylum fuit: reducta tandem (ut tertio mathematicarum scholarum libro proposuimus) & composita utcumque & numeris & lineamentis sunt elementa, eaq; edita & publicata, saltem ne tot periculis crepta imposterù periclitarentur. Verumtamen tanta malorum llias insequitur, ut cum respirare primum cæperim, tum afflictæ patriæ gravissimum dolorem animo percipiam. Laborum istorum partus feliciora lucis auspicia mereri videbatur. Quemnā igitur mecænatem hoc munere potissimum colerem? Christianissimumne regem? an ex optimatibus nostris præcipuum aliquem? At Galliae nescio quæ furialis erynnis miserabile regi spectaculum in ipso & regni & ætatis initio videtur extruxisse, in quo principes regni sui mutuis cædibus concurrentes ad extremum regni exitium spectare cogeretur. Itaq; Deus optime maxime miserere pereuntis regni, solem purioris religionis clarum & illustrem in Galliam tuam reducito, regem meum regum omnium beatissimum effcito: arma tot fortium utring; virorum in hostes nominis tui convertito. Interea verò mathematicum studiosos omnes obsecrabo, ut suscipiant laceras istas totoque æquore jactatas

—Reliquias Danaum atq; immitis Achilli

Si in Angliam repulerint: Elisabetham reginam laudum uirtutumque omnium patronam reperient. Si ad I. Steuardum Scotiæ rectorem principem cum bellica laude tum uera pietate insignem accesserint, nusquam à magistro naufragos veluti condiscipulos gratiores accessuros existimem. Germania jam mihi altera patria est, & præsens singulos mathematico

α 3 proæmis

IN ARITH. ET GEOMETRIAM PRAEFATIO.

proœmio appellatos salutare statuo. In Italia Hieronymum Cardanum et Federicum Commandinum ubi saluta verint, non dubito quin gratis animis excipiantur. Sed in Lusitaniam ad P. Nonium secundos ventos exopta verim. Hic enim vir Archimedeus, vir (inquam) Archimedeus est, qui eiectionis & egentibus precipue possit opitulari. Scripsi & rescripsi hic pleraque millies, & infinitis subinde modis commutavi, antequam ad propositam methodi normam quadrarent, magisq; logicam in mathematico themate exercui, quam mathematicam in suo pulvere serioque usu tractavi: neque jam biennio toto ad hæc studia recolendum a novis quotidie turbis requies ulla fuit: neque ideo dubito, quin tanta commutatio tanque tumultuaria editio pleraque tulerit, quæ pacatoris & quietioris otii meditatio non ferret. Hanc igitur meditationem mathematici mathematico proœmio appellati capeſſite: usum locis omnibus exigite: hujus enim gratia permulta ex elementis sustuli, & vos fortasse plura tolletis: aut quorundam nobis ignotum fructum demonstrabitis. Statueram singulos libros singulis uestrum nuncupare, quod equidem confido restituta pace facturum, ut accuratius singula corrigerentur & illustrarentur. Insanire enim plerosque doctos homines existimo, qui patronum & quidem plerumque rerum ipsarum ignarum adversus reprehensores operum suorum præfationibus invocant, quasi & dii quidam sint, qui nihil offenderint, aut peccata sua corrigi reipub. perniciosum arbitrentur. Quamobrem quantus cujusque uestrum erga mathematicas artes est amor, tantum in mathematica dignitatis emendationem & perfectionem incumbite, gratius isto beneficio atque optabilius mathematicum studiosis accidere nihil potest.

TIO.

danum et
gratis ani-
os Ventos
Archime-
rescria
antequam
n mathe-
e serioque
n á no Vis
mmutatio
quietioris
ici mathe-
ujus enim
lletis : aut
m singulos
ta pace fa-
nfanire e-
em plerun-
rum præ-
lerint, aut
n quantus
n mathe-
te, gra-

ERRATA ARITHMETICAE SIC CORRIGI-

to: primus numerus paginam, secundus
lineam significat.

1. 23 nota puncta in periodis. 3, 4 loci : tum 1 & 2 & 7 sunt 10 pro 1 sequentis loci. 8, 35 diviso-
rem & facio 12, 14, 32 si primus non: 15, 36 pro ipsis erit. 15, 30 pro 2 lege 3. 17, 30 $\frac{2}{3}$, 32 dividam 5
asses 12, 20, 7 $\frac{0}{4}$, 10 numeros alternis. 24, servabo : 23, 8 pro 2 lege 3 : & 26, supertri quarta. 24,
8, sic 10 ad 12 & 35 á medio superat factum ab extremis facto. 27, 4 lege 89 $\frac{1}{7}$. Eme, 16 iam. 31, 10
imitatus est, 31 lege $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{7}$

ERRATA GEOMETRIAE SIC CORRIGITO:

primus numerus paginam, secundus lineam signifi-
cat. Figuras quasdam euerfas aut transpo-
sitas redigito in ordinem.

5, 16 asymmetra. 6, 3 ab Euclide. 8, 15 inscripta. 23, 39 geometrica. 42, 6 i u y. 42, 7 & 8 a u y,
9 a & y. 57, 7 item. 11 basi y e erit e i ad i u u t y o id est per s e i z e s a i ad o u, & alterné, ut
e i ad a i, sic i u ad o u. 58, 9 per 2 & i e, 21 a i e aquantur, 32 eadem a e. 60, 29 in minore.
64, 30 terminum. 65, 13 mensuris. 66, 36 ad u a, 41 recedendi. 67, 9 pone l ad finem radii optici
in figura. 68, 3 th Euclidis, 19 pedum 20: 70, 30 $\frac{2}{3}$. 71, 19, 63. 75, 5 parallelogrammi. 76, 10 al-
terna, 12 cum rotundo, 13 duplum trianguli. 85, 1 celebratum, 40 si. 87, 15 & duplici, 31 consecta-
rium. 88, 6, 144: Hæ notæ significant quot. 89, 1 singulares. 90, 11 pone in figura 12. 91, 21 Car-
danus tantum agri. 92, 13 triplex. 93, 3 dele tertio. 13 totius. 94, 10 & o e i, 36 n j y. 95, 27 l s id
est, 29 latera, 40 fuerunt rationales. 97, 10 repone o in fine lineæ i l. 103, 2 utcunque, 32 genesis.
105, 25 sintque. 108, 15 hac. 110, 1 a e secet. 115, 31 æquilatera. 118, 5 repone in figura tangentem
i u. 128, 37 fac diametrum a o u. 141, 26 dele denique. 142, 27 é 18 &. 144, 12 puncto t. 146,
24 quam a i & a o æquatur. 151, 1 æquantur. 154, 12 si, 30 planis s r l m, & u j v f bifecanti-
bus, 32 dele duo plana s r l m & u j v f 32 sectio t f. 156, 20 é 1 c i s e 4. stereometria. 161, 9 ste-
reometria, 11 additus. 164, 15 Et ita, 16 demonstrantis. 166, 16 duplex, 19 y n, 30 in. 179, 1 d b.
180, 18 duobus. 185, 15 manens est. 186, 51 cylindri. 187, 13 hæc geodesia, 25 cylindris a b, 27, 74-
sis. 189, 12 diametro.

ALFONSO DEI MEDICI E DEI MEDICI

Il primo libro di questo trattato contiene le regole generali della medicina, e si divide in tre parti: la prima tratta della natura e delle qualità del corpo umano, la seconda della vita e della nutrizione, e la terza della malattia e della cura.

DEI MEDICI E DEI MEDICI

Il secondo libro di questo trattato contiene le regole generali della medicina, e si divide in tre parti: la prima tratta della natura e delle qualità del corpo umano, la seconda della vita e della nutrizione, e la terza della malattia e della cura.

P. RAMI ARITHMETICAE LIBER I

CAP. I. DE NOTIS ARITHMETICIS.



Arithmetica est doctrina bene numerandi. Partes arithmeticae duae sunt, simplex & comparativa: simplex, quae considerat simplicem numeri naturam. Numerus est secundum quem unum quodque numeratur: ut secundum unitatem unum, secundum binarium duo, secundum ternarium tria, & sic deinceps omnes numeri: Itaque numerus est unitatis aut multitudinis: potestque esse minimus, ut unitas: maximus autem quo major, dari nequeat, nullus esse potest. In numero spectatur primum notatio, deinde numeratio. Numeri, vero in abaco scribendi & notandi haec decem sunt notae, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. quarum prima significat unum, secunda duo, tertia tria, quarta quatuor, quinta quinque, sexta sex, septima septem, octava octo, nona novem: Circulus quae nota est ultima: nil per se significat: valet tamen ad alias notas amplificandum: Amplificationis gradus sunt tres, deincepsque periodis similiter iterati, semel, decies, centies. Nam de primis novem notis quaelibet sola, aut ultimo universi numeri loco, suum numerum semel exprimit: penultimo, decies, antepenultimo centies: Hac prima est periodus: Secunda est millium. Quarto itaque loco numerabis millena semel, quinto decies, sexto centies. Hinc sequitur tertia periodus, ubi numerabis millies millena semel, decies, centies: tum similiter quarta periodus est millies millena millia, ubi tres illi gradus similiter iterantur: & sic in infinitum. Numeros igitur ita notabis unum 1. decem 10. centum 100. mille 1000. decem millia 10000. centum millia 100000. millies millena 1000000: duo 2. viginti 20. ducenta 200. duo millia 2000. viginti millia 20000. ducenta millia 200000. bis millena millia 2000000: sic notae singulae locis ternis augentur. Atqui si numeri pluribus notis descripti & collecti summa longior fuerit: ut eam suis partibus efferre condiscas: fines periodorum punctis distinguantur. Numerum igitur decem his notis sic interpunctum 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 ita enuntiabis: Primo membro decies millies millena millia. Secundo ducenties tricies quater millena millia. Tertio quingenta sexaginta septem millia: Quarto octingenta nonaginta. Quapropter hoc commune velut alphabetum decem notarum ad quemlibet notandum numerum esto, alphabetum tamen non voci, sed manus & scripturae, id est abaco necessarium.

Consequens nona puncta in fine

CAP. II. DE ADDITIONE.

Numeratio est duobus oblati numerorum terminis tertium invenit, & quidem nisi tota simul expediti possit, inductione partium utitur, quoniam idem
a est nu-

est numerare per totum & per partes, tumque nota qualibet tanquam solitaria spectatur, & si sequenti numerationi serviat, mente reservatur ad effugiendum crebrioris liturae tadium. Numeratio est prima aut conjuncta. Prima, quæ numerum cum numero semel numerat, ut additio & subductio. Additio est numeratio prima, qua numerus additur numero, & habetur totus. Hic sunt decem unitates. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. quibus addendis numeramus 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10: ubi ad numerum quemque antecedentem unitas additur: & hæc prima species est additionis per unitatem: 2 addatur ad 1, totus erit 3: & 2 addatur ad 3, totus erit 5: & hic secunda species est additionis per 2: 3 addatur ad 1, totus erit 4: 3 addatur ad 4, totus erit 7: & tertia species additionis erit per 3: & sic deinceps. Additio numerorum continuorum prior & facilior est, quia toti cum totis simul adduntur: ut 4 quatuor debitoribus primus debeat aureos 1000. secundus 200. tertius 30. quartus 4: summam continenter addes, & dices esse 1234 aureos, & sic Aristoteles ait numerum necessario numerari per additionem. Additio disjunctorum numerorum præcipuam meditationem requirit, & quidem in notis primum inter se singulis: ut discipulus prompte sciat addere singulas cum singulis: ut 1 & 2 sunt 3: 4 & 5 sunt 9: 9 & 8 sunt 17, & similiter totum alphabetum 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9, sursum deorsumque addendo medietur. Hic Pythagoræus additionis abacus est. Numerorum disjunctorum additio sinistrorsum inducenda est, ut excrecentes summæ locis excrecentibus ordine facilius notentur: & ex his additis collectus numerus interjecta linea, subnotetur. Esto primum exemplum facillimum. Debitor tibi debet uno nomine coronatos 234, alter 111: Quærat igitur quæ summa sit ex utroque. Ordine dispositis numeris, ut similes inter se respondeant hoc modo.

2	3	4
1	1	1

sic incipiam: 1 & 4 sunt 5. Itaque 5 subnotabo: deinde 1 & 3 sunt 4: & hic secundo loco 4 subnotabo: Denique 1 & 2 sunt 3: quæ similiter subnotabo. Inductio sic erit.

2	3	4
1	1	1
3	4	5

In hoc exemplo tertius numerus invenitur 5 duobus datis: inducitur per partes, quæ singulæ tanquam solitariae spectantur. Esto jam paulo plenius exemplum ubi mentis reservatio adhibeatur: addantur 56789 ad 1234: dispositis numeris hoc modo.

5	6	7	8	9
1	2	3	4	

sic incipiam ab ultimo loco: 4 & 9 sunt 13: hic duæ notæ sunt duobus locis notandæ:

tandæ:ultima scribenda est ultimo loco,& secunda reservanda in secundum locum. Itaque subnotabo 3 & reservabo 10 pro uno sequentis loci, & dicam sequenti loco, 1 & 3 sunt 4: 4 & 8 sunt 12, subnotabo 2 & reservabo ut antea, 10 pro 1 sequentis loci: tum 1 & 1 sunt 2: & 2 & 6 sunt 8: quæ subnotabis: Deinde 5 sola reperiam, quæ sola similiter subnotabo: denique inuenies his duobus numeris additis totam summam esse 58023. Inductionis summa sic erit.

$$\begin{array}{r} 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\ \hline 5 \ 8 \ 0 \ 2 \ 3 \end{array}$$

Potest verò & complurium numerorum esse additio, sed tamen duo tantum separatim spectantur, & duo primum additi tanquam unus additur ad tertium, neque duobus plures adduntur, ut tertius inueniatur: Ut si queratur quampridem vixerit Homerus, & respondeatur è Gellio, 160 annis ante conditam Romam, quæ condita sit ante natum Christum annis 752: Christum vero natum anno abhinc 1567. addantur hi tres numeri: Summa inductionis indicans Homerum annos abhinc 2479 floruisse, erit hoc modo.

$$\begin{array}{r} 1 \ 6 \ 0 \\ 7 \ 5 \ 2 \\ 1 \ 5 \ 6 \ 7 \\ \hline 2 \ 4 \ 7 \ 9 \end{array}$$

Idem erit si quotlibet numeros proposueris, ut hic.

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\ 9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 4 \\ 7 \ 9 \ 5 \ 6 \ 8 \ 3 \ 1 \ 0 \ 9 \\ \hline 2 \ 0 \ 0 \ 6 \ 9 \ 9 \ 4 \ 5 \ 2 \ 3 \end{array}$$

CAP. III. DE SUBDVCTIONE.

Subductio est numeratio prima, qua numerus subducitur à numero, & habetur reliquus. Subduco 1 de 2, manet 1: 2 de 5, manent 3: 3 de 9, manent 6. Subductionis meditatio in singulis notis eadē hic esse debet, quæ fuit in additione: Tollo 3 de 7, manent 4: tollo 4 de 9, manent 5: & similiter totum alphabetum 123456789 omni genere versandum. Hic Pythagoræus subductionis abacus est: jam sit exemplū ubi totus numerus à toto simul subduci non possit, ut si

a 2 de sum-

ram solitaria
ffugiendum
ma, quæ nu
tio est nume
sunt decem
6. 7. 8. 9. 10:
c prima spe
atur ad 3, to
totus erit 4:
& sic dein
tori cum to
ureos 1000.
les, & dices
ri per addi
ationem re
compte sciat
ut 17, & simi
endo medi
orum addi
entibus or
a linea, sub
ano nomine
que. Ordine

& hic secun
do. Inductio

tur per par
tius exem
4: disposit

us locis no
tanda:

4

P. R A M I

de summa æris illius alieni 3 4 5 subducenda sunt 234, dispositis ordine numeris hoc modo,

3	4	5
2	3	4

subducendo infra: supra autem à quo subductio facienda, incipiam à sinistra dextrorsum, contra quam in additione: Tollo 2 de 3, manet 1, & supernoto 1 deletis 3 & 2. Deinde subducam 3 de 4, manet 1, & supernoto 1 deletis 4 & 3: denique subductis 4 & 5 manet 1, & supernotabo 1, deletis 5 & 4: unde inveniam reliquum esse 111, cum subduxero 234 à 345. Inductio tota sic erit.

1	1	1
3	4	5
2	3	4

Hoc exemplum invenit è duobus oblatis tertium, inducit per partes, easque tanquam solitarias. Esto jam & exemplum reservati mente numeri, nempe cum sequens subducenda nota major est, quàm supraposita, tum è reliquo præcedente, 1 mente reservabo, quod notam sequentem denario augeat: ut si subducenda sint 3 4 5 de 4 3 2, cum subducam 3 de 4 non supernotabo 1, quia 4 sequens subducenda nota major est supraposita 3, sed illud mente reservabo, & 4 subductis à 13 manerent 9, quæ nequaquam propter eandem causam notabo, sed uno minus, 8 tantum supernotabo, & 1 mente reservabo, quia sequens subducenda nota major est. Itaque 5 subductis à 12, reliqua 7 supernotabis: unde inveniam subductis 3 4 5 de 4 3 2 relinqui 87. Tota inductio sic erit.

8	7
4	3
3	4

Hæc subducendi vera via est, & majoribus deinde numerationibus necessaria, nec omnino prius antecedens nota est subducenda, quàm providero unde reliquæ subduci possint. Si intercurrent circuli significantibus notis, cum similibus tamen inscribendi, & eadem tenenda via est. Carolus magnus anno Christi 801 coronatus est imperator: nunc autem annus est Christi 1567. anni itaque ab imperio Caroli nunc sunt 766. Inductio sic erit.

7	6	6
4	3	4
3	4	5

sem ponitur exemplum maioris differentie: ut à 4000023 subducantur 22, restat

99, restabunt 3999924, inductio sic erit.

$$\begin{array}{r} 3999924 \\ \times 99999 \\ \hline \end{array}$$

Sit & alterum exemplum, ut subducantur 287659 de 387657. Inductio sic erit.

$$\begin{array}{r} 99998 \\ 387657 \\ \times 287657 \\ \hline \end{array}$$

Si plures termini fuerint vel subducendi, uel ejus, a quo subductio facienda, reducendi sunt prius additione in unam summam: ut si velis subducere 465 de 234. & 905. addes 234 & 905, totus erit 1139: unde subductis 465, reliquum erit 674.

CAP. II. DE MULTIPLICATIONE.

Numeratio prima ejusmodi est, conjuncta sequitur, quæ numerum cum numero toties numerat, quoties proponitur. Numeratio conjuncta est multiplicatio, aut divisio: multiplicatio est, qua multiplicandus toties additur, quoties unitas in multiplicante continetur, & habetur factus: unitas auget addendo: ut 1 & 1 sunt 2: 1 & 2 sunt 3: 1 & 3 sunt 4: attamen nihil auget multiplicando. Nam semel 1. 2. 3. sunt tantum 1. 2. 3. Item 2 sibi additus est 4, quot item efficit sui multiplicatio. Nam bis bina sunt item 4. Id in illis est proprium. At 2 & quilibet alius deinceps numerus quolibet loco ceteros numeros multiplicat: ut bis 3 sunt 6, hic sumo 3 bis, quoties nempe unitas in 2 multiplicante continetur. Denique pro dato multiplicante multiplicandus additur. Numeri inter se multiplicati faciunt eundem: ut quater quina sunt 20. & quinquies quaterna sunt item 20. Meditatio autem de multiplicandis inter se notis tanto accuratius suscipienda est, quanto majus est multiplicationis opus. Itaque puer perdiscat primo singulas notas per se multiplicare: bis bina sunt 4: ter terna sunt 9: quater quaterna sunt 16: quinquies quina sunt 25: sexies sena 36: septies septena 49: octies octona 64: novies novena 81. Tum singularum notarum cum singulis multiplicatione sciat quid efficiatur: ut bis 3 sunt 6: bis quaterna 8: bis quina 10: bis sena 12: bis septena 14: bis octona 16: bis novena 18: & sic in reliquis notis: sed in maioribus major est attentio: ut novies octona sunt 72: novies septena, sena, quina sunt 63, 54, 45: octies septena, sena, quina sunt 56, 48, 40. Hanc singularum notarum multiplicationem assecutus discipulus, multiplicationem quamlibet facilem habebit. Hic Pythagoræus multiplicationis abacus est. Atqui si rudibus majorum notarum aliqua difficilior erit, licebit & hic per partes numerare, ut octies novena,

a 3 si difficile

si difficile sit numerare, addam primo quater 9, deinde summam addam sibi ipsi, id est dimidium dimidio ut totum habeam, sic.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ \hline 36 \\ 36 \\ \hline 72 \end{array}$$

Quinetiam licebit per partes & hic multiplicare, & particulares summas addere, ut 8 per 9 sic.

$$\begin{array}{r} 27 \\ 35 \\ 35 \\ 10 \\ 21 \\ \hline 62 \end{array}$$

Sed jam majoris & pluribus notis constituti numeri multiplicatio proponatur, & quærat quis aureorum numerus menstruo stipendio 4 5 6 militum, cum singulis 4 aurei attribuantur. Id assequar 4 5 6 per 4 multiplicatis. Sinistrorsum, ut in additione procedam: quia multiplicandi notæ toties addendæ, quoties unitas in multiplicante continetur, & majorem commodius superne collocabo. Deinde multiplicantem per tres multiplicandi notas sigillatim ducam, & tribus trium segmentorum multiplicationibus singularibus absolvam. Numeris igitur ita dispositis, lineaque ut in additione subscripta, sic incipiam.

$$\begin{array}{r} 456 \\ 4 \end{array}$$

Quater 6 sunt 24: notabo 4, & 20 reservabo pro 2 loci sequentis: talis reservatio fuit in additione, & hic tanto crebrior, quāto numeratio major est: quater 5 sunt 20, & 2 reservata, sunt 22: notabo 2, reservabo iterum 20 in locum proximum pro 2, quater quaterna sunt 16, & 2 reservata sunt 18, quæ notabo integra: Inductionis summa sic erit.

$$\begin{array}{r} 456 \\ 1824 \end{array}$$

Unde

Unde inveniam 4 5 6 per 4 multiplicatis fieri 1824. Hic videmus inventionē, tertii inductionem partium, notarum solitudinem & reservationem. Idem fiet, per partes utriusque numeri tum multiplicandi tum multiplicantis. Proponatur igitur exemplum paulo plenius, & quidem per partes multiplicantis similibus multiplicandi partibus respondentes, ut 2070 per 204 multiplicentur. Singularis inductio partium componet tandem 422280 hoc modo.

$$\begin{array}{r}
 2070 \\
 \times 204 \\
 \hline
 8280 \\
 0000 \\
 0000 \\
 \hline
 422280
 \end{array}$$

Quo in exemplo, sicut in ceteris omnibus, circulus per circulum, aut per significantiem notam nihil efficit. Circulus tamen pro inventionē talis multiplicationis notabitur in principio ad sequentes notas augendum. At si sit in medio multiplicantis loco, nihil est necesse: compendio autem numeros in circulum desinentes multiplicare possumus detractis ultimis circulis: deinde iisdem facto postpositis: ut si multiplicentur 7200 per 450, omisis circulis illic duobus, hic uno, multiplicabo 72 per 45, & facto 3240, postponam tres circulos hoc modo, 324000. His perceptis nulla multiplicationis numeratio proponi poterit difficilis vel obscura, quamlibet ea magna sit: ut si multiplicandus sit 123456789 per 789 factus erit 98607406521.

CAP. V. DE DIVISIONE.

Divisio est, qua divisor subducitur à dividendo quoties in eo continetur, & habetur quotus: unitas minuit numerum subducendo, ut tollo 1 de 1, de 2, de 3, manet 0, 1, 2: non minuit tamen dividendo. Nam 12 divisus per 1, quotus est 12, id est 12 unitates quales sunt in dividendo, & hic divisus & quotus est idem. Divisus 12 per 12 quotus est 1, id est pars duodecima: & hic quotus est dividendi pars quota cognominis divisoni: ut secunda, si divisor sit 2: tertia, si 3: quarta, si 4, & sic deinceps. Atque ut in additione numerus totus, in subtractione reliquus, in multiplicatione factus, sic in divisione quotus cognominis divisoni quaritur, id est si per 2 dividatur, quid valeat una secunda dividendi, si per 3, quid tertia, si per 4, quid quarta. Divisio igitur multiplicationi respondet: sed analogia inversa: ut enim in multiplicatione unitas est ad multiplicantem, sic multiplicandus est ad factum: contra vero in divisione: ut dividendus ad divisorem, sic quotus ad unitatem.

Tres autem divisionis termini notantur, dividendus supra, divisor infra, quotus ad

addam sibi

mas adde

proponam
6 militum,
s. Sinistror
enda, quo
erne collo
n ducam, &
am. Nume
am.

lis reserva
st: quater 5
tum proxi
otabo inte

Unde

tus ad latus, ut diuisis 12 per 4, quotus 3 erit hoc modo.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 4 \quad 3 \end{array}$$

Atque meditatio illa, quæ in additionis, subductionis, multiplicationis numeratione commendata est, est hic imprimis commendanda, ut discipulus sciat quem numerum qualibet nota singularis, & per quem dividat: Sciet autem per comparisonem multiplicationis. Nam si numerus faciat numerum per aliquem, factum dividet per eundem. Unitas vero facit omnem numerum per ipsum, & omnis numerus seipsum dividit per unitatē: Ergo unitas dividit omnem numerum: Bis quaterna sunt 8: ergo 2 dividit 8 per 4, & 4 dividit eundem per 2. Quater 5 sunt 20: ergo 4 dividit 20 per 5, & 5 dividit 20 per 4. Septies 8 sunt 56: Ergo 7 dividit 56 per 8, & 8 dividit 56 per 7. Octies 9 sunt 72: Ergo 8 dividit 72 per 9, & 9 dividit 72 per 8, omninoque numerus dividitur per eos numeros per quos factus est: qui multos factores habet, habet etiam multos diuisores: Hic igitur Pythagoræus diuisionis abacus est. Sit exemplum ubi inductione sit utendum, & quidem dextrorsum, ut in subductione. Exemplum erit primū de diuisione toto & integro: dividantur 7476 per 6, notabo primum dividendum supra, diuisorem infra, & ad latus sinistrum, ut immobilis semper appareat, quamuis singulis in locis, deleatur: secus in prolixa diuisione confusio quadam per errorem memoriæ creari possit.

$$\begin{array}{r} 6) \quad 7 \quad 4 \quad 7 \quad 6 \\ \quad 6 \end{array}$$

6 7 possum subducere 6 semel, & manet 1: notabo igitur 1 pro quo, & deletis 7 dividendo, & 6 diuisore, superscribam 1. Prima inductio sic erit.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 6) \quad 7 \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad (1 \\ \quad 6 \end{array}$$

Secundo producam 6 diuisorem in proximum locum. Jam 6 possum subducere bis à 14, nec amplius, & bis senis subductis à 14 restant 2. Hanc igitur meditationem multiplicem subductionem animo reseruans adnoto primum 2 post 1 pro quo. Deinde ne forte lapsus memoriæ intercідat, aut aliquid aliud offensum sit, repeto ab animo depositum separatim per multiplicationem, & subductionem, & multiplico primo 2 quorum per 6 diuisorem, & reservatum ac jam reseratum subscribo sub 14, deleo que 6. Secundo subduco 12 à 14, & manent 2, quæ deletis 12 & 14, superscribo. Secunda inductio sic erit.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6) \quad 7 \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad (12 \\ \quad 6 \quad 6 \\ \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

Tertio

6) 1 2 3
7 4 7 6 (1 2 4)
5 5 5
1 2 4
2

2 2 2
 7 4 7 8 (12 4 6)
 5 5 5 5
 2 2 4 6
 2 2

12) 1 4 4
1 2

Tertio

igitur 1 pro quoto, & deletis 14 & 12 superscribam 2. Inductio prima sic erit.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 12) \cancel{1} \cancel{4} 4 (1 \\ \cancel{2} \end{array}$$

Secundo producam divisorem in proximum locū 24: ac videbo 1 à 2 bis subduci posse, & 2 à 4 toties, neque quidquam restare. Inductio tota sic erit.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 12) \cancel{1} \cancel{4} \cancel{4} (12 \\ \cancel{2} \cancel{4} \\ \phantom{\cancel{2}} \phantom{\cancel{4}} \end{array}$$

In prima inductione huius exempli, secunda divisoris nota saepius subduci poterat, quam prima: sit exemplum, ubi prima saepius subduci possit, quam secunda, & quidem divisor sit majorum notatum. Dividantur 841 coronati ex praeda militibus 29. Notabo primo dividendum & divisorem sic.

$$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \quad 1 \\ 29) \\ \end{array}$$

Ac videbo 2 ab 8 quater quidem subduci posse, ut primi 20 milites singuli capiant 400 coronatos: at reliqui 9 milites clamabūt iniquam partitionem esse, neque partem sibi æqualem relinqui, quia 9 à 4 toties subduci non possit: possum etiam 2 ter subducere ab 8, sed à reliquis 24 non possum toties subducere 9: subducam igitur, ut æqualitas subductionis in partibus divisoris observetur, 2 ab 8 tantum bis, & à reliquis 44 toties subducam 9, & manebunt 26. Ita que servans mente bis 29, id est 58, adnotabo 2 pro quoto, & per eum multiplicato divisore, recolligam quod ista multiplicis subductionis æquatione comprehenderam, & restituam 58, quæ deleta divisore subscribam dividendo, & ab eo subducam, manebunt 26, quæ subducendo 58, & supraposito 84 deletis superscribentur. Inductio prima sic erit.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 6 \\ 29) \cancel{8} \cancel{4} 1 (2 \\ \cancel{5} \cancel{8} \\ \phantom{\cancel{5}} \phantom{\cancel{8}} \end{array}$$

Secundo producam divisorem in reliquum dividendi locum 261. Hic possum 2 subducere tredecies à supraposito dividendo 26: Verum ab uno reliquo non possum

possum subducere 9 toties. Nec omnino fieri potest, ut nota divisoris ulla plusquam novies hac inductionis via subducatur: quia major numerus quam 9, unica nota comprehendi non potest. Cum vero 2 à 26 novies subduxero, à reliquis 81 potero subducere 9 toties. Depositis igitur in animo 261 adnotabo 9 pro quo, & per eum multiplicato divisore, repetam 261, quæ deleta divisore superscribam dividendo, ab eoque subducam delectis infra supraque, numeris tum subductis, tum, unde facta subductio est, nihil restabit. Tota inductione sic erit.

$$\begin{array}{r}
 26 \\
 29 \overline{) 261} \quad (29 \\
 \underline{26} \\
 1 \\
 \underline{26} \\
 1 \\
 \underline{26} \\
 1 \\
 \underline{26} \\
 1
 \end{array}$$

Si divisor primo dividendi loco sit maior, promoveatur in secundum locum: ut si dividam 252 per 42, non possum tollere 42 à 25: promovebo igitur divisorem in secundum locum, & reperiam 6 quotum. Si contingat aliquo post primum loco divisorem majorem esse dividendo, circulus in quo adnotetur. Sic divisus 608912 per 304 quotus est 2003. Quod si in reliquis in medio spatio vacuus locus offendatur, circulus videlicet ascribendus erit, quod accidet, si dividantur 364 in 26, ubi quotus erit 14. Jam dividatur quamlibet magnus numerus, ars exposita sufficit: ut si dividam illum antefactum numerum 97407406521 per alterum factorem 789, alter factor quotus erit 123456789. Hoc exemplum & similia majorum notarum mathematicam & Platonis *μικρογραφία*, & Aristotelis *ἀριθμητικὴ* imprimis declarabunt. Pes bonus, oculus bonus ait tyronibus lanista: mens bona, memoria bona, manus bona dicat hic arithmeticus discipulo: Varietas enim tam multiplicis in una numeratione numerationis erectam mentem & constantem memoriam, fidemque manum maxime omnium requirit. Ac jam nemo sibi arithmetice discipulus videatur, nisi singulis arithmetici studii diebus divisionem vel quam maximam poterit, efficiat. Compendia sunt etiam quaedam in dividendo. Si divisoris prima nota sit 1, reliquæ circuli, detractis è dividendo ab ultima notis, quot circuli fuerint in divisore, peracta divisio erit: sic divisus 500 per 10 vel 100, quotus erit 50.5.

CAP. VI. DE NUMERO PARI

& impari.

Divisione oritur numeri differentia, imparis & paris, primi & compositi. Impar est numerus à binario individuus, ut 3.5.7. Par est numerus divinus à 2, ut 2.4.6.8.10.12.14. Itaque in perpetua serie numerorum 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15, alii sunt pares, alii impares, quod erat Eratosthenis cribrum. Par est pariter par vel impariter par. Pariter par est par tantum divinus à pari per par: ut

b 2 4 tantum

4 tantum dividitur à 2 pari per 2 parem. ut 8 tantum dividitur à 2 pari per 4 parem: tales sunt omnes à binario duplicati: ut 4. 8. 16. 32. 64. Aelianus cap. 8. de re militari ait hunc numerum militiæ causâ excogitatum esse ad acies commodius permutandum. Itaque phalangis numerus à Tacicis exoptatur 16384. Par impariter par est, par diuiduus etiam ab impari per parem, ut 6 dividitur à 3 impari per 2 parem: sic 12 dividitur à 3 impari per 4 parem: sic 30 dividitur à 5 impari per 6 parem.

CAP. VII. DE NUMERO PRIMO

et composito.

A Tque hæc numeri prima est differentia è divisione: secunda est primi & compositi. Numerus primus est numerus indiuiduus ab alio multitudinis numero: ut 1. 2. 3. 5. 7: dividitur autem unitas per unitatem solum, reliqui etiam per se: at per alium multitudinis numerum sunt indiuidui. Primus etiam dicitur incompositus, id est à nullo alio multitudinis numero factus. Numerus compositus est numerus diuiduus ab alio multitudinis numero, ut 4 à 2 per 2 diuiduus est, ut 12 à 3 per 4. Sic in Eratosthenis cribro 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. considerato primos esse 1. 2. 3. 5. 7. compositos 4. 8. 9. Numerus autem multis modis compositus, propterea etiam diuiduus sæpe singulares usus habet, ubi queruntur numeri, qui plurimas exactas divisiones capiant. Sic 96 Archimedes elegit in circuli dimensione, cuius quotæ partes duodecim sunt 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 16. 24. 32. 48. 96. Sic astrologi 60 partiendis caelestium rerum momentis assumpserunt, cuius divisores sunt item duodecim, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 10. 12. 15. 20. 30. 60. Itaque ad inveniendum quot numeris numerus sit diuiduus, theorema tale inventum est. Divisores omnes dati cuiuscunque numeri sunt ab unitate per se primi, dividentes quoties possunt, & datum & dati quotum, & quoti deinceps quotum quemlibet, de inde compositi à primorum ultimo per ultimum, & à sequenti per utrumque & ab utroque factum, denique à reliquis similiter per superiores omnes: ut, Esto 482, cuius oporteat omnes divisores invenire. Primo 1 nihil mutat, secundo 2 numerus primus dividet, & quotus erit 241, qui divisus per 3 deinceps primum divisorem dabit 77, qui etiam per 7. primum divisorem divisus habebit in quotum 11. Hic habes 1. 2. 3. 7. 11 divisores dati primos, è quibus inter se multiplicatis efficitur jam ad compositos divisores accedo, & multiplico penultimum 7, per ultimum 11, facio 77. Hic primus ordo sic est.

7. 11. 77.

Secundo multiplico hos tres numeros per 3, & facio hunc secundum ordinem.

3. 21. 33. 231.

Tertio multiplico primum & secundum ordinem per 2, facioque hunc tertium & quartum ordinem.

2. 14.

2. 14. 22. 154.
6. 42. 66. 462.

Divisores itaque dati numeri 462 sunt addita unitate numero sedecim, 1. 2. 3. 6. 7. 11. 14. 21. 22. 33. 42. 66. 77. 154. 231. 462. Hac via numeri civium 5040 à Platone quinto legum quaesiti ad multiplices publicorum munerum functiones dividendum divisores omnes reperientur undexaginta, prater eum ipsum, ut Plato etiam illic admonet. Materies autem exercendi ingenii non mediocris hic erit. Exemplum primum divisores primos tantum semel accepit, hoc accipiet, quoties poterunt, primi sic erunt.

1	5	0	4	0
2	2	5	2	0
2	1	2	6	0
2		6	3	0
2		3	1	5
3		1	0	5
3			3	5
5				7

Hic 2 assumitur quater, saepiusque assumeretur si posset assumi, 3 bis assumitur, 7 semel. Atque hi primi sunt divisores, qui inter se multiplicati restituunt datum: compositi sequuntur, qui & primos una recolligent hoc modo.

	5	7	35	
3	15	21	105	
9	45	63	315	
2				
	10	14	70	
6	30	42	210	
18	90	126	630	
2				
	4	20	28	140
	12	60	84	420
	36	180	252	1260
2				
	8	40	56	280
	24	120	168	840
	72	360	504	2520
2				
	16	80	112	560
	48	240	336	1680
	144	720	1008	5040

b 3

Hic ha

2 pari per 4
elianus cap. 8.
ad acies com-
ptatur 16384.
it 6 dividitur
c 30 dividitur

primi & com-
titudinis nu-
ietiam per se:
icitur incom-
s compositus
dividuus est,
erato primos
ipositus, pro-
tur numeri,
in circuli di-
f. 32. 48. 96.
unt, cujus die
ad invenien-
a est. Diviso-
identes quo-
uemlibet, de
utrunque &
nes: ut, Esto
at, secundo 2
iceps primū
ebit in quo-
multiplicatis
mum 7, per

m ordinem.

unc tertium

2. 14.

Hic habes undequingenta divisores præter unitatem: omnes igitur divi-
fores in numero Platonico sunt 60 hoc modo. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 12. 14. 15. 16.
18. 20. 21. 24. 28. 30. 35. 36. 40. 42. 45. 48. 56. 60. 63. 70. 72. 80. 84. 90. 105. 112.
120. 126. 140. 144. 168. 180. 210. 240. 252. 280. 315. 336. 360. 420. 504. 560.
630. 720. 840. 1008. 1260. 1680. 2520. 5040.

CAP. VIII. DE NVMERIS PRIMIS INTER SE.

Primus & compositus numerus ita est, unde differētia oritur primorum inter
se, & compositorum inter se: cujus singularis est utilitas, ut apparebit postea
in reductionibus & variis inventionibus. Primi inter se sunt numeri communi-
ter indivisibiles à multitudinis numero, ut 2 & 3: ut 5 & 6: ut 8 & 9. Primorum inter
se arithmetica paulo plenior est, datorum cognitio est per subtractionem & di-
visionem. Si duo inæquales numeri perpetua subtractione minoris à majore
quoties poterit nullem multitudinis numerum antecedētis divisorem relinque-
rint, primi erūt inter se: sic 5 & 3 sunt primi inter se, quia subductis 3 à 5 manent
2, qui non dividit 3 antecedentem numerum, deinde subductis 2 à 3 manet 1,
quæ dividit quidem 2 antecedentem, sed non est numerus multitudinis: sic 27
& 8 sunt primi inter se, quia si subducas 8 ter: subtractio enim etiam multiplex
assumenda est, 3 reliquus non dividet 8 antecedētem: tum 3 bis subductis ab 8,
reliquus 2 non dividit 3 antecedentem: denique subductis 2 à 3, reliqua erit uni-
tas sola. Sic 29 & 21 assidue subtractio explorabit primos inter se: sic 96 & 67, &
assidue subtractionis exempla sic erunt.

27	29	96
8	21	67
3	8	29
2	5	18
1	3	11
	2	7
	1	3
		1

Si primus dividerit datū, erit ad eum primus, ut in 5 & 8, 5 primus nō dividit 8, &
primus est ad eū. atq; ita subtractione & divisione primi inter se numeri cogno-
scuntur: sūt etia additione & multiplicatione. Si duo numeri sint primi inter se,
totus ex iis est primus ad utrumque, & contra: ut 17 ex 8 & 9 est primus ad 8 & 9,
& contra cum 17 sit primus ad 8 & 9, ipsi sunt primi inter se. Hoc additionis est.
Si duo numeri sint primi ad tertium, factus ab utroque erit primus ad eundem,
ut 4 & 6 sunt primi ad 7, & 24 ab iis factus primus est ad 7. Hinc duo sequun-
tur. Primum, Si duo numeri primi sint inter se, factus ab altero per se primus erit
ad reliquū: ut in 4 & 3: 12 factus à 4 per se multiplicato est primus ad 3. Secun-
dum, Si bini numeri primi sint inter se facti, ab iis erunt primi inter se: ut in 89
primis sigillatim ad 7 & 5, nempe 8 ad 7 & 5. Item 9 ad 7 & 5: facti 72 & 35 ab 8
& 9, item à 7 & 5 sunt primi inter se. Ex his duobus tertium sequitur. Si duo nu-
meri pri-

meri primi sunt inter se facti & a datis per se & a datis deinceps per factos, perpe-
tuo primierunt inter se, ut hic.

2	4	8	16	32
3	9	27	81	243

Ex hac inventione postea deducetur eximia progressio continué proportiona-
lium minimorum.

CAP. IX. DE NVMERIS COMPOSITIS INTER
se, eorumque communi diuisore maximo.

Compositi inter se sunt numeri cōmuniter diuidui à numero multitudinis,
ut 4 & 6 sunt compositi inter se, quia communiter diuidui à 2 numero mul-
titudinis: sic 5 & 10, quia sunt cōmuniter diuidui à 5 numero multitudinis: sic 7
& 7 sunt compositi inter se, quia sunt communiter diuidui à 7 numero multitu-
dinis. Potest igitur compositorum inter se uterque esse compositus, potest alter
tantum, potest etiam neuter. In arithmetica compositorum inter se numerorū
duo spectantur, diuisor communis maximus, & diuiduus communis minimus.
Diuisor communis maximus est primus in assidua subductione diuidens ante-
cedentem, ut in 4 & 10: reliquus per assiduam subductionem 2 erit cōmunis di-
uisor maximus, quia primus relinquitur antecedentē diuidens. Hinc consecta-
rium deducitur. Numerus diuidens numerū est maximus amborum cōmunis
diuisor, ut in 3 & 3 maximus cōmunis diuisor est 3. Nam 3 seipsum diuidit, & di-
uidit reliquū 3: Sic in 3 & 6 maximus communis diuisor est 3: quia seipsum pri-
mo, deinde 6 diuidit, nec maior numerus ternario potest dividere 3, propterea-
reque & maximus est diuisor in 3 & 6. Idem erit in maiore exemplo.

5	6	7
3	4	8
2	1	9
1	2	9
	9	0
	3	9
	1	2
		3

Eadem via quotlibet compositorū maximus cōmunis diuisor inuenietur. Nam
duorū præcedentiū inuentus diuisor pro ipsis erat diuiduus: inuenti itaque di-
uisoris & proximi cōmunis diuisor, ut antea requiretur: sic in 4. 6. 8. diuisor com-
munis maximus erit 2: quia cōmunis in 4 & 6 est 2, primus nempe reliquus an-
tecedentem diuidens: tum in 2 & 8 est idem 2: quia diuidit 8 maiorem: sic in 9.
15. 21. diuisor communis maximus erit 3: sic in 12. 20. 28. erit 4: sic in 18. 24. 30.
erit 6. Diuisor autem maximus ostendit in quoto diuisorem minimum: sic in 12
diuisor maximus 6 dabit in quoto 2, & compositos inter se diuidens dabit in
quotis primos inter se, ut in 12 & 8 maximus diuisor utriusque communis da-
bit in quotis 3 & 2 primos inter se.

CAP.

igitur diui-
12. 14. 15. 16.
90. 105. 112.
504. 560.

S E.

orum inter
rebit postea
communi-
orum inter
onem & di-
is à maiore
em relique-
à 5 manent
3 manet 1,
inis: sic 27
multiplex
ductis ab 8,
qua erit uni
96 & 67, &

diuidit 8, &
eri cogno-
m inter se,
is ad 8 & 9,
itionis est
d eundem,
o sequen-
rimus erit
3. Secun-
e: ut in 8 9
& 35 ab 8
Si duo nu-
meri pri-

CAP. X. DE MINIMO COM-
muni dividuo.

D Ati duo numeri per alios multiplicati varios numeros facere possunt, ideoque & factos communiter dividere: sed ex omnibus communiter dividuis minimus modo queritur, quod fundamentum postea futurum sit permagna utilitatis in contractionibus & proportionibus. Diuiduus à duobus minimus est factus ab altero per alterius diuisorem communi diuisori maximo cognominem: ut diuiduus à 12 & 8 minimus est 24: Nam maximus communis diuisor in 12 & 8 est 4, à quo connotinati diuisores in 12 & 8, id est una quarta utriusque sunt 3 & 2. At factus à 12 per 2: vel ab 8 per 3 sunt 24, communis diuiduus à 12 & 8: ab iis enim factus est, à minimis, quia factus ab altero per alterius diuisorem maximo communi diuisori cognominem. Exemplum ita est.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 12 \overline{) 24} \quad 8 \overline{) 24} \\ 4 \overline{) 24} \quad 2 \overline{) 24} \end{array}$$

Sat vero fuerit unum diuisorem cognominem inuenisse: ut hic vel 3 tantum, vel 2 tantum, ut alterna multiplicatione quæsitum numerum reperias. Possunt vero dati efficere innumerabiles communiter ab utroque diuiduus, ut 8 multiplicatus per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, facit 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72: & 12 per 2, 3, 4, 5, 6, facit 24, 36, 48, 60, 72. è quibus sunt communes 24, 48, 72, ut hic vides.

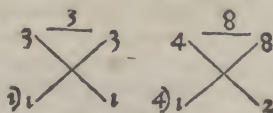
72	72
60	64
	56
48	48
36	40
	32
24	24
	16
12	2

Sed ex iis omnibus nullus erit minor quam 24. Duo consecutaria sunt ex illa generali inuentione communis minimi diuidui. Primum, factus à duobus inter se primis est minimus ab utroque diuiduus, ut 6 factus à 3 & 2 est minimus diuiduus ab utroque: exemplum integrum sic esset.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 3 \overline{) 6} \quad 2 \overline{) 6} \\ 2 \overline{) 6} \quad 3 \overline{) 6} \end{array}$$

Secundum

Secundum confectarium est. Dividuus ab aliquo est minimus ab utroque dividuus: ut 3 est dividuus à 3, & communis est ab utroque dividuus minimus. Item 8 est dividuus à 4, & communis est dividuus ab utroque. Exemplum utrunque integrum sic efficit.



Ergo hoc duplex compendium est è prima propositione inveniendi minimi dividui. Eadem via minimus à tribus aut quatuor, aut quotlibet dividuus invenitur. Quia repertus jam minimus dividuus conferendus est cum proximo. Nam factus ab altero per alterius divisorem, maximo communi diviſori cognominè, est minimus ab ijs dividuus: sic minimus ab 8, 6, 4, dividuus est 24. Nam 24 est minimus dividuus ab 8 & 6: rurſum idem minimus diuiſus est à 24 & à 4: ut è ſecundo confectario patet. Sic à 3, 4, 8, minimus dividuus 24: quia minimus à 3 & 4 est 12, tum minimus dividuus à 12 & 8 est 24. Sic minimus diuiduus ab 1, 2, 3, 4, 5, 6 est 60. Hinc ſequitur minimus dividuus à nominibus datarum partium, est minimus qui habeat datas partes: ut minimus dividuus qui habeat unam ſecundam, unam tertiam, unam quartam est 12, nempe minimus dividuus à 2, 3, 4, quique minimus bifariam, trifariam, quadrifariam dividi poſſit.

CAP. XI. DE NOTATIONE
partium & particularum.

Numeratio dicta est: ſed numeri, cuius partes notationem quandam ſuam & reductionem requirunt, antequam numerentur. Duæ verò notæ tantum ſunt in alphabeto, notationis huius, linea interſecta ſeparata, ſuperior numerus vel numerator: inferior, nomē ſeu nominator appellatur. Sic diſiſis 8 per 3 quotus est 2, & manent duæ tertie, quæ ita notantur $\frac{2}{3}$: & 2 est numerus partium, 3 est nomen: qua notatione utendum eſt, quoties minor numerus per maiorem diuidendus proponitur: peracta enim diſiſio eſt interſecta linea. Si dividam 12 aſſes 5 fabris: diſiſio ſic erit: $\frac{12}{5}$, unde intelligitur ſingulorum partem quotam eſſe 5 uncias. Itaque ſi peracta numeri diuiſione aliquid è diuidendo relinquatur, reliquus numerus interſecta linea ſuperpoſitus diviſori, indicat partes unitatis, quales nempe in dividendo fuerint, tumque etiam reliqua diuiſio facta eſt: ut ſi diſiſerim 5 aſſes 2 bajulis, diuiſio ſic erit $\frac{5}{2}$ (2 $\frac{1}{2}$), unde intelligitur ſingulis 2 aſſes & dimidium aſſis unius cedere. Item ſi 11 aſſes diſiſerim tribus, diuiſio hæc $\frac{11}{3}$ (3 $\frac{2}{3}$) indicabit ſingulorum quotam partem eſſe 3 aſſes, & duas tertias unius aſſis, id eſt 8 denarios, & ſimiliter in cæteris: ubi in quoto, numerus integer indicabit partes numeri dividendi: partes autem indicabunt partes, non multitudinis,

poſſūt, ideo dividuus minimus magna utilis: minimus eſt no cognominis diviſor quarta utriuſque dividuus à alterius diviſiſt.

tantum, vel 2 Poſſunt vero 8 multiplicari 2, 3, 4, 5, 6, fa- des.

ſunt ex illa ge- robus inter ſe- inimus diuiſi-

Secundum

titudinis, sed unitatis: hinc patet divisione legitimè peracta reliquū numerum semper esse minorem diviſore seu nomine: nam si numerus eſſet æqualis nomini, ut $\frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3}$, eſſet unum integrum: si maior, ut $\frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3}$, eſſet plus uno integro, diviſor quē & hinc & illinc ſubducī potuiſſet. Quantum verò partium numerus deſicit à nomine, tot unius integri partes dividendo deſunt, ut ſemel ab eo diviſor ſubducatur, ut in $\frac{4}{9}$ deſunt $\frac{2}{9}$. Eſt verò in particulis & partibus partium ſua quædam diſtincta notatio, & earum minimæ notantur, ut partes. Reliquæ nulla interjeſta linea. Ergo tres quartæ duarum tertiarum unius ſecundæ ita notabuntur $\frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$: ut ſi pater filios 2 reliquerit æqua parte cohæredes, tūc filius alter filios 3 æqua item parte patrimonij, ſed primus coemerit alterius fratris partem, deceſſerit quē quatuor filij ſuperſtitibus, æqualiter item partiis, eorum quē primus coemerit partes ſecundæ & tertij, hic nepos haberet ex avita hæreditate $\frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$.

CAP. XII. DE REDUCTIO-
ne terminorum.

Notatio ejuſmodi eſt, ſequitur reductio terminorum vel integrorum partiumque. Reductio terminorum ſit ad minimos proportionales terminos, & eſt diviſio terminorum inter ſe compoſitorum per maximum communem diviſorem: ſic $\frac{8}{12}$ per 4 communem maximum diviſorem redeunt ad $\frac{2}{3}$, ſic $\frac{2}{5}$ per 5 maximum communem diviſorem redeunt ad $\frac{1}{5}$. Hæc reductio eſt imprimis neceſſaria, ſi termini partium ſint compoſiti inter ſe: ut antequam numerentur partes, termini reducantur ad primos inter ſe: primi enim ſunt minimi, & minimi ſunt primi. Et quanto facilius eſt parvos quàm magnos numeros numerare, tanto maiorem commoditatem numeranti reductio hæc afferet. Itaque tãquam ſolleciffimus in arithmetica fuerit proponere partes in terminis inter ſe compoſitis, aut non protinus reducere, ut $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$ pro $\frac{1}{12}$. Eadem reductio etiã per numerationis ſpecies eſt ſpecialis in terminis binarum partium. In additione & ſubductione minimus à nominibus dividuus eſt aſſumendus pro communi nomine & numeri multiplicandi, alterne per partes cognomines, ut hic

$$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \\ \frac{2}{3} \quad \frac{4}{9} \\ 1 \quad 3 \\ \hline 9 \end{array} \text{ ubi pro } \frac{2}{3} \text{ \& } \frac{4}{9} \text{ habes } \frac{4}{9} \text{ \& } \frac{4}{9}.$$

In multiplicatione numerus & nomen alternis reducuntur: ut in $\frac{2}{3} \frac{5}{6}$ reduces 2 & 6 ad 1 & 3, & multiplicabis $\frac{1}{3} \frac{5}{6}$ & facies $\frac{5}{6}$: quia idem eſt multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{6}$, & $\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{6}$. Itaq; tanquam $\frac{2}{3}$ rediges ad $\frac{1}{3}$, & pro $\frac{1}{3}$ facies $\frac{5}{6}$. Iſi ſi numerus nominis alterno ſit æqualis, reliquus numerus reliquo nomini ſuperpoſitus multiplicationem abſolvit, ut in $\frac{2}{3} \frac{3}{4}$ omiſſis 3 & 3, habes $\frac{2}{4}$, id eſt $\frac{1}{2}$. Quin ſi longa hic ſeries fuerit, æqualibus omnibus omiſſis, reliquus numerus cum reliquo nomine

mine multiplicationem absolvet, ut hic $\frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{5} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1}$ est $\frac{1}{9}$. In divisione numeri inter se, vel nomina inter se, vel utraque separatim reducuntur: ut si $\frac{4}{3}$ dividatur per $\frac{2}{3}$, pro 2 & 4, sumes 1 & 2, & quota pars erit $\frac{2}{3}$ vel $1 \frac{1}{3}$. Item si divides $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{9}$, sumes 2 & 3 pro 9 & 6, & facies $\frac{1}{3}$, vel $1 \frac{2}{3}$; item si divides $\frac{8}{7}$ per $\frac{4}{9}$, sumes 1 & 2 pro 4 & 8: & pro 9 & 27, 1 & 3, & quota pars erit $\frac{2}{3}$. Quapropter reductio terminorum ejusmodi est.

CAP. XIII. DE REDUCTIONE INTEGRORUM & PARTIUM.

Reductio integrorum & partium deinceps est. Reductio integrorum est multiplicatio integrorum per nomen partium: sic reducere 12 asses ad uncias est multiplicare 12 per 12, quia uncia est $\frac{1}{12}$ assis, & fiunt 144 unciae, vel $1 \frac{11}{12}$. Reductio partium est ad integra, vel ad partes. Reductio partium ad integra, est partium divisio per suum nomen: ut reducere $\frac{1}{12}$ ad integra est dividere 144 per 12, & quotus 12 ostendit integros asses 12. Reductio partium ad partes, est ad binas partes proportionales ejusdem nominis, vel ad unas aequales. Reductio partium ad binas partes, proportionales ejusdem nominis est multiplicatio terminorum per alterum nomen: sic $\frac{1}{12}$ redeunt ad $\frac{1}{12} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{12}$: multiplicatio tunc 2 & 3 terminos $\frac{2}{3}$ per 4, tunc 3 & 4 terminos $\frac{4}{4}$ per 3, proportionales autem sunt $\frac{1}{12}$ datis $\frac{1}{12}$. Nam si numerus multiplicet numeros, facti sunt proportionales multiplicatis, & sic 8 ad 2 & 12 ad 3 sunt proportionales, quia aequo majores: facti nempe per eundem. Minora enim sunt similia & proportionalia aequo majoribus, per logicum similitudinis axioma: sic $\frac{2}{12}$, item proportionales datis $\frac{1}{12}$. Aequalia verò nomina sunt, quia 3 & 4 inter se multiplicantur, ideoque idem faciunt. Nomina reductione eadem facta ad divisionem nihil attinent. Nam cum reduceris $\frac{2}{12}$ ad $\frac{8}{12}$, dicere $\frac{8}{12}$ toties in $\frac{2}{12}$ contineri, nihilo plus est, quam dicere 8 toties a 9 contineri. Itaque nominum inter se multiplicatio in divisione omittitur: ac si series reducendarum partium longior fuerit, binæ reducendae sunt, ut in $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ prima reductione, atque hinc additione facta, habebis $\frac{8}{15}$: quæ cum $\frac{2}{3}$ reducatur sunt $\frac{8}{15} \times \frac{3}{2} = \frac{4}{5}$. Eadem via reductionis, cognoscetur e binis partibus in quibus utraque sint majores, ut $\frac{2}{3}$ sunt majores quam $\frac{4}{5}$, quia facta reductione, habebis $\frac{2}{15}$ pro $\frac{4}{5}$: at habebis tantum $\frac{1}{4}$ pro $\frac{2}{3}$. Superest reductio partium ad unas partes aequales, quæ particularum variarum reductio est, & fit multiplicatione numerorum inter se, & nominum inter se. Sic $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ redeunt ad $\frac{8}{15}$, id est $\frac{1}{2}$. Si series longior fuerit, binæ sunt expediendae, ut in $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}$, primò facies $\frac{8}{15}$, id est $\frac{1}{2}$. Deinde ex $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ facies $\frac{1}{4}$. Idem autem fuerit dicere $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$, vel $\frac{2}{5}$, quia iidem numeri inter se multiplicati creant eosdem. Per hanc particularum reductionem cognoscis quid sint particulae, cum vides quales sint partes totius. Eodem compendio partes integrorum cognoscuntur, ut $\frac{2}{3}$ triginta quinque aureorum sunt $\frac{20}{3}$, id est 10 aurei, tanquam quateretur $\frac{2}{3} \times \frac{15}{1} = 10$.

c 2 CAP.

nū numerum
qualis nomi-
ntegro, divi-
um numerus
el ab eo divi-
partium sua
Reliqua nulla
ita notabun-
filius alter fi-
attris partem,
orumque pri-
a hereditate

grorum par-
les terminos,
mmunem di-
 $\frac{2}{3}$, sic $\frac{1}{3}$ per
est imprimis
m numeren-
nt minimi, &
umeros nu-
feret. Itaque
ninus inter se
ductio etiam
i. In additio-
us pro com-
ines, ut hic

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ reduces
plicare $\frac{2}{3}$ per
umerus no-
ositus mul-
si longa hic
reliquo no-
mine

CAP. XIII. DE NVMERATIO-
ne partium.

A Tqui partium notatio & reductio ejusmodi est, unde expeditur numeratio primarum & cognominum, & quidem partium tantum, aut partium cum integris permistarum. Partium tantum facilis est, spectat enim tantum numeros, excepta multiplicatione, quæ tum numeros, tum nomina vel diversa multiplicat: sic $\frac{2}{7}$ sunt $\frac{2}{7}$: sic subductis $\frac{2}{7}$ à $\frac{5}{7}$, restant $\frac{3}{7}$: sic $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{7}$, faciunt $\frac{6}{49}$. Item $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{4}$ faciunt $\frac{6}{28}$, id est $\frac{3}{14}$. Sic per $\frac{2}{7}$ dividantur $\frac{10}{7}$, quotus erit 5, significans dividentes partes in dividendis quinq̄es contineri: si nomina diversa sint, vulgus etiam putat, perinde divisionem fieri, ut si per $\frac{2}{3}$ dividantur $\frac{8}{3}$, numeros alterius nominibus multiplicant, faciunt $\frac{16}{9}$, at hic non est divisio, sed reductio ad partes proportionales cognomines, tanquam è $\frac{2}{3}$ fecisses $\frac{8}{12}$ & $\frac{16}{12}$, & jam neglectis nominibus (quia numeri tantum hic spectantur) proponeres per 8 dividenda 9: cum enim per 8 divideres 9, & quotus esset $1\frac{1}{8}$. Atque hic factus est minor multiplicationis & divisionis: Unitas enim major est multiplicante, multiplicandus igitur erit major facto: Sic inversè alternando, unitas est major divisore, ergo quotus est major dividendo: in divisione tamen quotus (ut dixi) non significat integra, sed quoties divisor contineatur in dividendo. Superest numeratio partium cum integris paulo operosior: Additio nihil mutat, 2 & $\frac{2}{3}$ sunt $2\frac{2}{3}$ & $4\frac{2}{3}$ sunt $7\frac{1}{3}$. Sic numeratio libellarum, assium, denariorum, & ejusmodi efficitur: ut si proponantur addendæ libellæ 38, asses 178, denarij 147 cum libellis 23, assibus 289, denarijs 268. Primò colligam denarios 415, id est $\frac{415}{1}$. Itaque divisio numero per nomen, habeo asses 34 & 7 denarios, notabo denarios 7, & serrabo asses 34 proximo loco: Deinde additis assibus 34 ad 178, & 28, totus erit 301 asses, id est $\frac{301}{1}$. Nam 20 asses faciunt unam libellam: divisio itaque numero per nomen, habeo 25 libellas, & 1 assẽ: notabo 1 assẽ, & servabo 25 libellas, quibus additis ad 38 & 23, habeo libellas 86. Summa denique additionis hoc modo:

38 l	178 a	147 d
23	289	268
86	1	7

Subductio ex integris capit unum pro tot partibus, quantum est nomen: ut si à 2 subducerem $\frac{2}{3}$, sumerem 1 à 2, pro $\frac{2}{3}$, & à $\frac{1}{3}$ subducerem $\frac{2}{3}$, tum è 2 manebit $1\frac{1}{3}$: si à $\frac{2}{3}$ tollam $2\frac{1}{3}$, reduco 2 ad tertias multiplicando per nomen 3, facio $\frac{6}{3}$, quibus additis cum $\frac{1}{3}$, habeo $\frac{7}{3}$, quibus subductis à $\frac{2}{3}$ manent $\frac{4}{3}$: vel reducam $\frac{2}{3}$ ad unitates divisione numeri per nomen, habeo 3, unde tollam 2, manet 1, & ex 1 reducto ad tertias, id est, è $\frac{1}{3}$ tollam $\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. Itaque à $\frac{2}{3}$ si tollam $2\frac{1}{3}$ manet $\frac{1}{3}$. Si à $2\frac{1}{3}$ tollam $1\frac{2}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. Subductio permistorum ejusmodi: integrorum cum partibus sic fieri potest, ut antea est additio facta, sed partes si excedant

dant unum, commodius autem reducuntur ad suas unitates divisione: ut si subducenda sint 38 libellae, asses 178, denarii 147, è 86 libellis, 1 asse, 7 denarijs, reducam primò 147 denarios ad 12 asses & 3 denarios. Deinde additis 12 assibus ad 178, totus 190 reductus ad libellas, facit novem libellas & 10 asses: additis jam 9 libellis ad 38, totus est 47. Ita jam denique tollam 47 libellas, 10 asses, 3 denarios, restabunt 38 l. 11 ass. 4 d. Subductionis summa sic erit.

$$\begin{array}{r} 38 \quad 11 \quad 4 \\ 86 \quad 11 \quad 470 \\ 47 \quad 103 \end{array}$$

Multiplicatio integrorum per partes multiplicat subijciendo uno pro nomine: sic $\frac{1}{2}$ per $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{2}{3}$, id est 2: Integer verò cum partibus per integrum solū, vel cum partib. multiplicari potest, & separatim & coniunctim. Sic multiplico 7 $\frac{5}{12}$ per 4 $\frac{1}{12}$, prima multiplicatio 7 per 4 facit 28, secūda 7 per $\frac{1}{12}$ facit $\frac{7}{12}$, id est 6 $\frac{6}{12}$, tertia $\frac{5}{12}$ per 4 facit $\frac{20}{12}$, id est 1 $\frac{8}{12}$: quarta $\frac{1}{12}$ per $\frac{5}{12}$ facit $\frac{5}{144}$. Hæc omnia addita sunt 36 $\frac{6}{144}$: idem facio si reducā datos numeros ad $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{12}$ & multiplicando faciam 61 $\frac{41}{144}$, & divisione eruam 36 $\frac{6}{144}$. Divisio etiam potest aliquādo separatim fieri: ut si per 2 $\frac{2}{3}$ dividantur 5 $\frac{1}{3}$. Primò subducam 2 à quinque bis, & manebit 1, id est $\frac{2}{3}$, quibus ad $\frac{1}{3}$ additis, habebō $\frac{4}{3}$, unde possum etiam bis subducere $\frac{2}{3}$. Itaque quotus totus erit 2: at id in divisione majoris numeri difficilior esset, cum non facile videam, utrum divisor toties in partibus contineatur, quoties in integris: ut si per 7 $\frac{1}{3}$ dividam 36 $\frac{6}{144}$: cum videro 7 quinquies subduci posse è 36, non video ex reliquo & $\frac{6}{144}$ utrum toties subduci possit: at per reductionem facilius est.

P RAMI ARITHMETICAE

LIBER SECVNDVS.

CAP. I. DE RATIONVM NOTATIONE

¶ numeratione.



Arithmetica simplex adhuc fuit, comparatiua sequitur: quæ interpretatur comparisonem numerorum in quantitate & qualitate. Comparatio æqualitatis est una & individua: ut 1 ad 1, 2 ad 2, 3 ad 3. Comparatio inæqualium numerorum est differentia vel ratio. Differentia est comparatio quantum terminus differt à termino: ideoque subductione cognoscitur: sic differentia 2 ad 3, & 3 ad 5, & 5 ad 8 est 1. 2. 3. quia cum subduxeris 2 à 3, 3 à 5, 5 ab 8 relinquitur 1. 2. 3. Ratio est comparatio, quoties terminus in termino continetur: ideoque divisione cognoscitur, dataque ratione termini cognoscuntur contraria multiplicatio.

c 3 tione:

nomen: ut
è 2 manebit
facio $\frac{2}{3}$, qui-
reducam $\frac{2}{3}$
manet 1, &
am 2 $\frac{1}{3}$ ma-
di: integro-
tes si exce-
dant

tionem: sic ratio 3 ad 2 est sesquialtera, quia 3 continet 2 semel & dimidium: sic ratio 5 ad 2 est ratio superbi-tertia, quia 5 continet 2 semel & duas tertias: sic ratio 6 ad 3, est ratio dupla, quia 6 continet 3 bis: quoti igitur illi rationum indices sunt $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, iam multiplica 1 per 2 nomē, & adde 3, erit antecedens sesquialterius rationis nomen ipsum 2 consequens: sic multiplica 1 per 3 & facto 3 adde 2: 5 erit antecedens, 3 consequens: 2 autem duplum significanti subijce 1 termini dupla rationis erunt 2. r. Rationum arithmetica quadam est in notatione & numeratione, cum numeranda sunt rationes, antecedens supernū, consequens infernū notatur. Numeratio autem ista longē dissimilis est simplicis numerationis. In eodem enim opere additio & multiplicatio est, subductio & divisio: ut in Euclide, Archimede, Ptolemaeo, mathematicisq; antiquis perspicies. Additio rationum est multiplicatio terminorum inter se similium, id est, antecedentium inter se, & consequentium inter se, & compositio rationum dicitur, sic ratio $1\frac{1}{2}$ addita rationi $1\frac{1}{3}$ est ratio $1\frac{2}{3}$, quia ratio æqualitatis nil auget, sic ratio $1\frac{1}{2}$ addita rationi $1\frac{1}{3}$ est ratio $1\frac{2}{3}$. Sic ratio $1\frac{1}{2}$ addita rationi $1\frac{1}{3}$ est ratio $1\frac{2}{3}$: sic duplicari, triplicari ratio dicitur, quando rationis bis ac ter positæ termini multiplicantur: sic duplicatur & triplicatur ratio $1\frac{1}{2}$, quando termini ita multiplicantur $1\frac{1}{2}$ ($2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$). Ergo additio rationum est multiplicatio terminorum. Itaque si termini rationum sunt quomodocunque continui, ratio extremorum componetur ex omnibus intermedijs rationibus: ut in 1. 2. 3. 4. 5. 6. ratio 1 ad 6 componitur ex omnibus intermedijs rationib. ut hic vides $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$. Nam ratio 120 ad 720 est ratio 1 ad 6, ut patet reductione. Hæc ex Euclide arithmetica est. Subductio rationū est divisio terminorum, ut tollatur ratio $1\frac{1}{2}$ à ratione $1\frac{1}{3}$ relinquitur ratio $1\frac{1}{6}$: Hæc utraque numeratio apud Ptolemaum in musica & astrologia additio & subductio nominatim appellatur. Quare summorum mathematicorum usus notabilis est, ne quis error ex ambiguitate oriatur.

CAP. II. DE GENERIBVS rationis.

Ratio inæqualitatis est maioris vel minoris. Ratio inæqualitatis maioris nominatur à maiore termino, sed minoris præponendo sub: ut ratio 2 ad 1, dicitur dupla, 1 ad 2 subdupla. Ratio est prima aut conjuncta. Prima quæ unicam speciem rationis habet, eaque simplex est aut multiplex. Simplex cum maior terminus continet tantum semel minorem, & aliquid præterea, ut ratio superparticularis & superpartiens. Superparticularis ratio est, quando terminus terminū semel tantum continet, & præterea unam partem: si secundam, tertiam, quartā, dicitur sesquialtera, sesquitercia, & sic deinceps, ut hic:

3	4	5
2	3	4

Partes verò reliquæ in doctrina rationum demonstrant non partes unitatis in di-

in diviso, ut in doctrina partium, sed partes minoris termini, ut in ratione 3 ad 2, quotus $1\frac{1}{2}$ demonstrat 2 contineri semel in 3, & præterea unam secundam ejusdem 2. Ratio superpartiens est, quando terminus terminum continet semel, & præterea aliquot partes, si duas tertias, tres quartas: quatuor quintas dicitur superbitertia, supertriquarta, superquadriquinta: ut,

5	7	9
2	4	5

Ratio multiplex est, quando terminus terminum continet sæpius exacte, si bis, ter, quater, ratio dicitur dupla, tripla, quadrupla: ut,

2	3	4
1	1	1

Ratio conjuncta est, quæ multas rationis species continet, ut ratio multiplex, superparticularis, & ratio multiplex superpartiens. Ratio multiplex superparticularis est, quando terminus terminum sæpius continet, & præterea partem unam, ut dupla sesquialtera, tripla sesquitercia, quadrupla sesquiquarta: ut hic vides,

5	10	17
2	3	4

Ratio multiplex superpartiens est, quando terminus terminum continet sæpius & præterea plures partes, ut dupla superbitertia, tripla superbiquarta, quadrupla superquadriquinta: ut hic vides,

8	15	24
3	4	5

Sic igitur species rationis subtiliter explicata sunt, & generatim comprehensa duabus regulis, altera divisionis ad speciem, altera multiplicationis ad terminos rationis inveniendum: ac etiam multo brevius solis terminis, arithmetica hæc tota de generibus rationum expediri & exerceri potest, ut à magnis quoque mathematicis exercetur: longitudo habitabilis terra, major latitudine, quam 5 ad 3, inquit Aristoteles 5. cap. 2. Meteor. Ratio circuli ad diametrum quadratum est, ut 11 ad 14, inquit Archimedes de dimensione circuli, pro ratione superbitertia, item pro ratione supertriundecima: itaque soli propositi termini nominem speciei referent, & quidem in proportionibus, id est in ipso rationum usu,

ubi rationum species nusquam appellatur: nomina tamen illa specialia interdum à Mathematicis appellantur: itaque etiam tenenda.

CAP

partes unitatis
in di

CAP. III. DE PROPORTIONE

Arithmetica.

Sequitur cōparatio in qualitate numerorū, quæ proportio dicitur, eāq; arithmetica aut geometrica. Proportio arithmetica est æqualitas differentiarum: ut in 12. 10. 8. 6: utrobique enim est 2 pro differentia etiam inversè & alternè: ut enim 6 ad 8, sic 6 ad 12: una enim differentia 2 est. Item ut 12 ad 8, sic 10 ad 6. Differentia enim utrobique est 4. Proportionis arithmetice proprietates duæ sunt, in disjunctis primò. Medius simul uterque est æqualis simul utrique extremo, & factus à medijs superat factum ab extremis facto à differentia maximi supra medium per ejusdem medijs differentiam supra minimum, ut in 12. 10. 8. 6. 10 & 8 sunt 18, item 12 & 6 sunt 18: ut factus à medijs est 80, qui superat 72 factum ab extremis 8 facto à 4 differentia primi 12 supra medium 8 per 2 differentiam ejusdem medijs 8 à minimo 6. Prima proprietas suppeditat inventionem mediorū, inter duos datos. Nam simul utriusque dati duæ qualescunque partes, sunt medijs arithmetice proportionales inter datos: ut inter 2 & 10: hinc uides,

	12		
2.	1	11	10.
	2	10	
	3	9	
	4	8	
	5	7	
	6	6	

Secunda proprietas requirit numeros extremos & medios quantitate, non solum ordine, ut in 12. 8. 16. 12. 128 factus à medijs non superat 144 factum ab extremis. Ex his duabus proprietatibus disjunctæ proportionis arithmetice duæ aliæ derivantur in continua. Medius est dimidijs extremi simul utriusque, & factus à medijs superat factum ab extremis, factum à differentijs: ut in 3. 5. 7. Nam 3 & 7 sunt decem, quorum dimidijs est 5: item 25 factus à 5 in se multiplicato superat 21 à 3 & 7, factum 4 facto à 2 & 2 differentijs, 2 à 5 & 5 à 7. Et prima proprietate oritur inventio medijs sumpto duorū datorum dimidio. Proportio nis arithmetice continuæ termini quantumlibet continuari possunt, & progressio arithmetica vulgò dicitur, & in ea inventio duplex est: prima optati est termini hoc modo. Si tollatur unitas à nomine termini optati, factusque à reliquo per differentiam addatur primo termino, totus erit optatus: ut in progressionē quaternaria ab unitate, si quærat decimus terminus, hic decimus nomen est termini, tolles 1 à decem, & à reliquo 9, per 4 differentiam facies 36, quo ad 1 addito, totus erit 37, decimus terminus quaternariæ progressionis ab unitate sic, 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. Secunda inventio est summæ, ut sequitur: factus à simul utroque extremo per dimidiatum nomen termini ultimi est summa, ut in proximo

proxima progressionē adde: & 37, totus erit 38, qui per 5 dimidiatum nomen ultimi termini, facit 190 summam. Idem erit factus à nomine ultimi termini, 10 per 19 dimidium simul utriusque extremi. Si paciscatur cum domino servus annuam sibi mercedem progressionē arithmetica, primoque die teruncium unicum, secundo quatuor, tertio septem, & sic deinceps, quotitur anno vertente, quæ summa mercedis erit. Primum pro teruncio potes sumere uncias 3, & facere 3 primum terminum, quare ultimum: quoniam trecentessimus sexagesimus sextus est, reperies 1098. Iam simul uterque erit 1101, dimidiatum nomen ultimi termini est 183, ab ijs factus est 201483 uncia, id est libellæ vicenorum assium: 839 $\frac{1}{40}$, vel 10 assium, & teruncii unius.

CAP. IIII. DE PROPORTIONE GEOMETRICA,
dequē ejus regula aurea.

Proportio arithmetica sic est, geometrica sequitur, in rationum æqualitate, & hic propriè proportio numerorum, & proportionales numeri dicuntur, ut 3, 6, 4, 8. tum directè, ut 3 ad 6, sic 4 ad 8: tum inversè, ut 8 ad 4, sic 6 ad 3: & alternè, ut 3 ad 4, sic 6 ad 8. Proprietas hic item duplex est, ut in arithmetica proportionē, primo in disjunctis terminis: ut, maximus & minimus reliquis sunt majores, & factus à medijs æquatur facto ab extremis, ut in eodem exemplo 3 & 8, id est 11, majores sunt 6 & 4, id est 10: item 24 factus à 6 & 4, medijs æquatur 24 factus à 3 & 8 extremis: prima tamen proprietas non convertitur ut secunda: nec enim verum est, si quatuor numerorum maximus & minimus reliquis sunt majores, iccirco proportionales esse, quod in secunda proprietate perpetuum est. Si quatuor numeri sunt proportionales, factus à medijs, æquat factum ab extremis: & contrā si æquat, sunt proportionales. Hæc proprietas propter admirabilem usum, vulgo regula aurea dicitur, & certè si quid auro pretiosius esset, eo quoque nomine digna esset. Hinc patet inventio mediorum datis extremis, & quarti tribus datis. Nam divisor facti ab extremis, & quotus sunt medij proportionales: ut datis 4 & 3 extremis, factum ab ijs 12, dividens 2 & quotus 6 sunt medij: item si è tribus datis primus dividat factum à reliquis, quotus erit quartus proportionalis: ut è datis 4, 2, 6. primus 4 dividat, & factum à 2 & 6: quotus 3 erit quartus proportionalis. Quartus autem proportionalis ab exercitatis in arithmetica, sine aurea regula, frequenter expeditur ex sola proportionis definitione, præsertim in superparticularibus & multiplicibus: ut si quaratur, ut 8 ad 12, sic 10 ad quem? vel, ut 2 ad 4, sic 3 ad quem? Illic videbunt secundum primi se sequi alterum esse, hic duplum: ideoque quartum tertio perinde rationalem esse, id est 15: id est 6. Ita si quaratur cum imperij vectigal annuum est 12, tum Asia pendit 4: si præterea 15 imperetur, quota erit Asia portior? Respondet, 5. nam ut 12 est triplus ad 4, sic 15 triplus ad 5. In superpartitiis & conjunctis rationibus id minus promptum fuerit. Sed tamen regulæ aureæ usus per sese inmensus est per omnia rationum genera. Est enim analogissimus proportionis in arithmetica, quod syllogismus argumentationis in logica. Proportio dis-

quantitate, non
44 factum ab
his arithmetice
mututiusque,
ijs: ut in 3, 5, 7.
5 in se multipli
5 à 7. E' prima
idio. Proportio
sunt, & progres
a optati est ter
isque à reliquo
n progressionē
mus nomen est
36, quo ad 1 ad
ab unitate sic,
itur: factus à si
summa, ut in
prox

tio disjuncta est terminis quatuor simplex, aut pluribus multiplex. In simplicis & directæ quæstionibus imprimis spectandus est ordo terminorum: ut nempe primus primo loco sit, ut ceteri suo, primusque sit homogeneus tertio, & secundus quarto: id enim sic alternè quæri solet, & proportio tractatur commodius: denique tertius sit qui facit quæstionem. Itaque si confusus (ut solet) quærat, redigantur in ordinem termini: ut si quærat quot horæ sunt in 6 diebus, cum in 3 sint 72. Hic quæstio est tertij termini, quæstionisque proportio sic expedietur: 3 dies sunt horæ 72: ergo 6 dies erunt horæ 144. Hic primus terminus & tertius sunt homogenei: sunt enim de diebus, secundus item & quartus: sunt enim de horis, & tertius facit quæstionem, quæ quarto proportionali invento solvitur. Interdum dantur tres termini, sed obscurius, ut si quærat $\frac{3}{4}$, quot sunt $\frac{1}{12}$. Hic terminos tres habes 4. 3. 12. Itaque quarto proportionali invento respondebis $\frac{3}{4}$ esse $\frac{9}{12}$. Idem verò sit quærere, quot sunt $\frac{1}{12}$ in $\frac{3}{4}$.

CAP. V. DE EXEMPLIS AUREAE REGULAE, SIMPLICI
centi integrorum numerationem ante requirentibus.

P Rincipem proportionem antecedit, alia quadam modo simplex numeratio, modo proportio. Exempla cujusque generis proponimus: ut aromatum pondo 1000 in Lusitania empta sunt nummis 10000, proque his vestigal pensatum nummis 1000: naulum Rhotomagus usque fuerit 300: ibi deinde vestigal 500: vestura Luteriam usque 200: accesserit ministrorum impensa 2000: mercator lucrari vult in singulas libras 4, id est pro tota summa 4000: Additis impensis illis omnibus summa erit 18000. Iam dicito: 1000 pondo dant impensas 18000: ergo 1 dat 18, additionis hoc exemplum est. Centum libras emit mercator 10 aureis, vendidit 12, quantum lucri fuisset ex aureis 100: Primò videbis subducta forte à lucro, lucrum 10 aureorum esse aureos 2. Tum igitur per regulam auream dicito: 10 dant 2, ergo 100 dabunt 20. Item si libra 3 aureis empta venderetur tantum 2, quanta esset jactura ex aureis 100: Hic cum videris per subtractionem fortis à jactura, jacturam in 3 esse 1: tum dices per auream regulam 3 perdunt 1: ergo 100 perdunt 33 $\frac{1}{3}$. Hæc exempla subtractionis sunt. Si confundantur res heterogeneæ reducendæ sunt prius ad idem genus: ut si quærat. Hebdomadæ tres horas habent 504, dies 4 quot horas habent. Hebdomadas 3 rediges multiplicatione 7 ad dies 21: tumque dices, 21 dies sunt horæ 504: ergo 4 sunt 96. Item emit mercator doliū vini aureis 8, lucrari vult 2, quanti pintam vendet: Hic rediges doliū ad 288 pintas: tot enim cōtinet: item aureos 8 emptionis, & 2 lucri, id est 10, ut pretium utrunque jungas, rediges ad denarios 6240, cum aureus sit assium 52. Tum dices per auream regulam, 288 pintæ valent denarios 6240: ergo 1 pinta valet 21 $\frac{2}{3}$, id est $\frac{2}{3}$: sed hic additio est & multiplicatio, ut in tribus exēplis proximis. Commuta 3 aureos in asses, semisses, quadrantes, æquali singulorum generum numero, quot asses, quot semisses, quot quadrantes dabis: Commuta 3 aureos in asses, id est in 52 habebis 156: deinde asses in minimam propositarum moneta, ut in quadrantes, habebis 624.

lex. In simplicis
um: ut nempe
tertio, & secun
ar commodius:
et) quatur, re
6 diebus, cum
tio sic expedie
terminus & ter
rtus: sunt enim
invento solvi
quot sunt 17
ento responde

IMPLI=

plex numera
s: ut aromatum
vestigal pens
bi deinde vesti
mpensa 2000:
4000: Additis
do dant impen
bras emit mer
Primò videbis
gitor per regu
3 aureis empta
m videris per
auream regu
is sunt. Si con
is: ut si qua
ibent: Hebdo
lies sunt horæ
ari vult 2, quan
tinet: item au
as, rediges ad
regulam, 288
ed hic additio
ureos in asses,
t asses, quot se
in 57 habebis
drantes, habe
bis 624,

bis 624, quales assis valet 4, semissis 2, quadrans 1. Hi valores 4. 2. 1. additi sunt 7: unde proportio concludetur, 7 continet semel singula quæ sita genera: ergo. 624 continent octogies novies cum $\frac{1}{7}$, adde singula hæc genera, summa assium redibit. Termini proportionis ita sunt 7. 1. 624. 897. Emo 4 aureis aquali numero libras piperis, zingiberis, amygdalarum, saccari, quot è singulis generib. libras habebis: redige ut antea, aureos ad asses 208, tum vide quantum ex ijs assibus valeat libra singulorum generum: ut libra piperis 25, zingiberis 25, amygdalarum 5, saccari 12, pretijs his additis, totus est 67, iam proportionem concludere, 67 asses dant 1 libram singulorum generum: ergo 208 dant $3\frac{8}{67}$. Hæc si multiplices pretijs singulorum generum inventum numerum restitues 208 asses. Paulò dis simile est proximum, in quo duo termini proportionis primi comprehenduntur proposita specie: ut ad quem numerum 12 est duplus superbipartiens quintas: Hic pro duobus rationis terminis habes speciem, quæ ita picta $2\frac{2}{5}$, multiplicatione quoti integri per nomen, & additione numeratoris restituet 13 pro antecedente, 5 autem pro consequente, & termini proportionis tres sic erunt: 13. 5. 12. am regula aurea invenies pro quarto $4\frac{8}{13}$. Aliquando est multiplicatio & subductio: ut Curiores 2 Lutetia Romam contendunt, sed primus 20 millia passuum quotidie conficit, secundus 33, primus 6 diebus præcesserit, quando secundus assequitur: Hic intelligis quotidie secundo tantundem conficiendum esse, quantum primus conficiat, & præterea 13. imprimis igitur collige per multiplicationem jam confectum iter, habebis 120 millia, tum sume 13 exuperantiam secundi, & dic: Secundus conficit 13 millia uno die supra primum, idem 120 millia, quot diebus supra eundem conficiet: proportio sic est, 13. 1. 120. $9\frac{3}{13}$. Divisio etiam antecedere potest, ut 1 dolium valet 4 coronatos, pintæ 2592, quantum valebunt: reduces pintas 2592 ad 9 dolia dividendo, nempe 2592 per 288, quæ 1 dolium faciunt, & tunc alterni termini erunt homogenei, regulaque aurea tum sic erit, 1 dolium valet 4 aureos: ergo 9 dolia valebunt 36 aureos.

CAP. VI. DE EXEMPLIS AUREAE REGULAE,
simplicem fractionum numerationem ante
requiruntibus.

A Tque hæc exempla integrorum numerorum fuerunt: sequentia sunt fractionum. Perfolveris æris alieni $\frac{1}{3}$, deinde $\frac{1}{4}$, & restent decem aurei, quantum erat totum æs alienum: additæ partes sunt $\frac{7}{12}$, reliquum igitur est $\frac{5}{12}$: unde quæstionis proportio concluditur: 5 valent 10 aureos, ergo 12 valent 24. Turris $\frac{1}{3}$ in terra latet, $\frac{1}{4}$ demergitur sub aqua, reliqua pars 60 cubitis supra aquam eminet, quot igitur cubiti in terra: quot in aqua? Partes additæ sunt $\frac{7}{12}$, reliquum igitur $\frac{5}{12}$ valent 60, unde concludes:

	4	48	
5 valent 60: ergo			
	3	36	
			d 2
			Talis

Talis est quaestio duplex Graecorum epigrammatum, primi de statua Pal-
ladis.

*Pallas ego sum malleata, sed aurum
juvenum est, donum poetarum.
Dimidium quidem auri Charisius, octavam autem
Thespis, & decimam partem posuit Solon,
Sed vigesimam Themison, reliqua verò talenta
Novem, & ars, donum Aristodici:*

Quantum singuli contulerunt?

Adde partes, habebis $\frac{3}{4}0$. Itaque reliqua 9 ad complendum totum, valent 9 pro-
posita. Hic accidit eundem esse numerum propositum, & reliquum, ut quartus
sit aequalis tertio. Summa itaque est 40. Charisius ergo contulit 20: Thespis:
Solon 4: Themison 2. In proximo epigrammate res alia est.

*Augeam interrogavit magna virtus Alchide
Multitudinem armentorum quærens, ipse verò respondit:
Circa quidem Alphæi fluvium, amice, dimidium quidem horum:
Pars autem octava collem Saturni circumspascuntur.
Duodecima autem secessit Taraxippi ad montem.
Circa verò Elidem divinam vigesima pascuntur.
Verum in Arcadia trigesimam reliqui.
Reliquos autem videto greges, sic quinquaginta.*

Quanti igitur erūt greges singulis additæ partes sunt $\frac{2}{15}0$. Reliqua igitur 25
ad explendū totum valēt 50: ergo 120 valent 240. Itaque $\frac{1}{5} \frac{1}{12} \frac{1}{15} \frac{1}{20}$ sunt 120:
30. 20. 12. 8: fractionum verò numerorum numeratio paulo operosior est in ter-
minis proportionis: ut, Unius moletrina tres mola molunt 12 horis modios,
prima 18, secunda 13, tertia 8, quot horis universa molent modios 24? & quan-
tum singulae adde primum 18. 13. 8, habebis 39. prima quaestio sic erit: 39 modii
moluntur 12 horis: ergo 24 moluntur $\frac{2}{3}$, id est horis 7 $\frac{1}{3}$. Hic antecedit unica
additio: at in tribus quaestionibus de tribus molis intercurrent partes, in qui-
bus vitanda molestioris numerationis gratia pro 7 $\frac{1}{3}$, assumes $\frac{2}{3}$: singulae igitur
quaestiones sic erunt. Prima mola molit 12 horis 18 modios: ergo $\frac{2}{3}$ molent
11 $\frac{1}{3}$. In secunda & tertia dicito, 12 dant 13: ergo $\frac{2}{3}$ dabunt 8: item 12 dant 8: er-
go $\frac{2}{3}$ dabunt 4 $\frac{1}{3}$.

CAP. VII. DE EXEMPLIS AVREAE REGVL AE, PRO-
portionem antecedentem requirentibus.

Proportionis antecedentis principem proportionem sequentia deinde exem-
pla erunt, & primum de proportionē arithmetica antecedente. Putecarius
quidam puteum brachiorum 34 redemit effodiendum libris 60 cum victu ge-
minarum operarum. Effossis autem brachijs 20, agrotare coepit, mercedemque
debitam rogavit, quanta igitur ea est? Hic victus nihil variat, sed arithmeticae
progressionis usus hic est ante proportionis geometricae conclusionem. Nam
secundum

secundum brachium, laborem primi ferè continet, & tertium utriusque, & sic deinceps arithmetica gradatione labor crescit: Itaque summa integræ progressionis 34, brachiorum est 595: & summa progressionis 20 brachiorum, est 210. Jam ad proportionē conclude: ut 595 ad 60: sic 210 ad 21 $\frac{10}{3}$, vel $\frac{3}{17}$. In sequentibus exemplis geometrica proportio antecedit cum numeratione simplici aliqua. Cursor Lutetia Lugdunum 3 diebus pervenit, cursor alius velocior Lugduno Lutetiā idem iter conficit, discedant hodie meridiano tempore, quando & ubi inter se occurrent: Præpone proportionēs antecedentes, sic. Primus 5 diebus totū iter conficit: Ergo uno die cōficit $\frac{1}{5}$ itineris. Secundus 3 diebus conficit iter: ergo uno die conficit $\frac{1}{3}$ itineris. Hæ partes additæ sunt $\frac{8}{15}$ itineris, unde tota proportio concluditur, $\frac{8}{15}$ itineris conficiuntur 1 die: ergo $\frac{15}{8}$, id est 1 conficitur $\frac{15}{8}$ diei, id est 1 die, & sequentis $\frac{7}{8}$, hoc tempus est concursus, id est perendie nona matutina: Ubi proportio duplex & additio partium unica antecedit: in ejusmodi autem exemplis, ubi totum & integrum scriberetur, ut $\frac{15}{8}$, commodius erit assumere 1, quia $\frac{1}{8}$ reductæ nihil aliud sunt, quàm 1. Reliqua autem quæstio deinde facilius est. Primus 5 diebus conficit 1: ergo $\frac{1}{5}$ diei conficiet $\frac{1}{40}$ itineris, id est $\frac{1}{40}$. Secundus conficit 3 diebus 1. Ergo $\frac{1}{3}$ cōficit $\frac{1}{120}$, id est $\frac{1}{120}$. Locus igitur cō, cursus erit ad $\frac{1}{40}$ itineris à primo cōfecti, & ad $\frac{1}{120}$ à secundo cōfecti. E' duob. architectis primus absolvet ædificiū 20 dieb. cū secundo absolvet 14: quot igitur diebus secundus solus absolvet: Dico primū 20 dies absolvūt 1, id est totū: ergo 14 absolvet $\frac{14}{20}$, id est $\frac{7}{10}$. Itaq; secūsus absolvit 14. diebus $\frac{3}{10}$, jam concludere, $\frac{3}{10}$ fiunt 14 diebus. Ergo 1 fit diebus 46 & $\frac{2}{3}$ diei, id est horis 16. E' quatuor architectis ædificium totum absolvet primus 1 anno, secundus 2, tertius 3, quartus 4. Si omnes simul adhibeantur, quanto tempore absolvent: Secundus 2 annis absolvit totum opus: ergo uno anno absolvet $\frac{1}{2}$ operis, tertius $\frac{1}{3}$, quartus $\frac{1}{4}$: adde jam singulorum opus $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, habebis $\frac{13}{12}$: unde concludes de architectis quatuor, $\frac{12}{13}$ fiunt 1 anno: ergo 1 fiet $\frac{12}{13}$ unius anni, id est 5 mēibus, & $\frac{10}{13}$ unius mensis. Hic triplex proportio antecedit, & partium triplex additio. Talia sunt exempla duo sequentia. Leofontis quatuor fistulas habet, quarum prima implet subsecutum lacum 24 horis, secunda 36, tertia 48, quarta 6: si simul fluant, quot horis implebunt: facito proportionēs antecedentes, 24 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{24}$ lacus: 36 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{36}$ lacus: 48 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{48}$ lacus: 6 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{6}$ lacus. Adde jam partes impleti lacus 1 hora, habebis $\frac{137}{144}$, quales 144 totum faciūt. Dices igitur 37 partes lacus implentur 1 hora. Ergo 1 impletur $\frac{1}{37}$, id est 3 horis, & $\frac{2}{37}$ unius horæ. Hic antecedit proportio quadruplex & additio partium triplex. Proximum exemplum facilius etiā est.

Lacus fontis tres fistulas habet, quarum prima vacuat lacum $\frac{1}{4}$ horæ, secūda $\frac{1}{3}$, tertia hora 1, quanto tempore fluentes simul omnes vacuant lacum: Dices hic ut antea: $\frac{1}{4}$ horæ vacuat semel, ergo 1 hora vacuat quater: item $\frac{1}{3}$ vacuat bis, 1 hora semel: adde has vices, habes 7, & dico. Lacus vacuatur septies 1 hora:

d 3 ergo

de statua Pal-

ontulerunt
m, valent 9 pro
um, ut quartus
t 20: Thepiss:

iqua igitur 25
 $\frac{1}{10} + \frac{1}{10}$ sunt 120:
sior est in ter-
horis modios,
s 24: & quan-
erit: 39 modii
ntecedit unica
partes, in qui-
 $\frac{6}{3}$: singula igitur
ergo $\frac{20}{3}$ molene
12 dant 8: er-

PRO-

a deinde exem-
te. Putarius
cum viſtu ge-
mercedemque
ad arithmetica
ionem. Nam
secundum.

ergo vacuatur semel $\frac{1}{2}$ horæ: termini ita sunt 7. i. $\frac{1}{2}$. Hic antecedit triplex, sed simplex additio est, & integrorum. Duo exempla reliqua breviora & faciliora sunt.

Et duobus architectis primus absolvet 30 diebus, secundus 40: tertio autem addito 15 diebus absolvent, quot diebus tertius solus effecisset. Primus 30 diebus absolvet totum ædificium. Ergo 15 diebus absolvet $\frac{1}{2}$ ædificii, id est $\frac{1}{2}$. Secundus absolvet 40 diebus: ergo 15 diebus absolvet $\frac{15}{40}$ id est $\frac{3}{8}$: adde jam $\frac{1}{2}$ habebis $\frac{7}{8}$, quibus subductis ex $\frac{8}{8}$, restat $\frac{1}{8}$, quam tertius est effecturus illis 15 diebus. Jam denique dicito: $\frac{1}{8}$ conficitur 15 diebus: ergo 1 efficitur 120 diebus. Hic antecedit proportio duplex & subductio partium una, ut in proximo. Fons duas fistulas habet, prima implet lacum horis 4, si sola fluat, secunda vacuat horis 11, si illa obstructa sit: si una fluat, quot horis implebitur lacus? Distinguito proportionem antecedentes & dicito: 4 horæ implent lacum, ergo 1 hora implet $\frac{1}{4}$ lacus: deinde 11 horæ vacuant lacum: ergo 1 hora vacuat $\frac{1}{11}$ lacus. Jam ut sola impletio maneat, tolle $\frac{1}{11}$ ab $\frac{1}{4}$, restabit $\frac{7}{44}$ lacus, quæ implentur 1 hora: unde quæstionis proportio concludetur: $\frac{7}{44}$ lacus implentur 1 hora: ergo $44 \frac{7}{7}$ implentur $\frac{44}{7}$ horæ, id est 6 horis, & $\frac{2}{7}$ unius horæ.

CAP. VIII. DE RECIPROCA-
procatione.

Proportio simplex directa sic est: plerumque autem reciproca invertitur: Proportio reciproca est, quando est ut primus terminus primæ rationis ad primum terminum secundæ: sic secundus terminus secundæ est ad secundum primæ: ubi homogeneorum tantum ratio sumenda est, ut potentiarum inter se, temporum inter se, pretiorum inter se, mensurarum inter se: tumque de terminis reciproca proportionis tertius quaeritur. Itaque factus ab extremis divisus per datum est mediis alterum dabit reliquum in quo. Hac proportionem utendum est quoties autis vel minutis momentis res contra minuuntur, vel augentur, pro ratione potentia, temporis, ponderis, pretii, mensuræ. Quod diligenter animadvertendum est, ne periculoso errore directa proportio pro reciproca concludatur: quod facilius est numeratis rebus animadverti potest, quam ex ipsa numerorum natura. Sed res exemplis intelligatur: ut si quæstio sit de aratione 10 iugum, & dicatur, 15 boves arant 8 diebus: ergo 20 boves arabunt 6 diebus. Exemplum quæstionis & conclusionis sic erit, ut reciprocatio cernatur.

$$\begin{array}{cc} 15 & 20 \\ 8 & 6 \end{array}$$

Eadem proportio inverso terminorum ordine concluditur sic, 6.15.8.20: ubi de tribus datis terminis ultimo loco prolatus erit primus, primo loco propositus erit ultimus: quaesitus autem erit tandem proportionis inversæ ultimus. Atqui in hoc exemplo & similibus omnibus terminis idem sapius iteratus rejiciendus est, ut

CAP. IX. DE COMPOSITA PROPORTIONE per additionem.

HActenus proportio simplex fuit in quatuor terminis: sequitur multiplex, ubi termini plures quatuor usurpantur: idque compositione vel continuatione. Compositio terminorum est prima aut secunda: prima ut additio & alligatio. Additio est, cum termini datæ proportionis adduntur: estque triplex, prima est additio antecedentis cum consequente ad consequentem: ut 4 ad 3, sic 8 ad 6: ergo ut 7 ad 3: sic 14 ad 6. Secunda est additio complurium antecedentium ad unum consequentem, vel unius antecedentis ad plures consequentis: ut 2 ad 4, sic 3 ad 6: & 8 ad 4, sicut 12 ad 6: ergo 10 ad 4, sicut 15 ad 6: item ut 6 ad 2, sic 9 ad 3, & ut 6 ad 4, sic 9 ad 6: ergo ut 6 ad 2 & 4, sic 9 ad 3 & 6. Hæc utraque compositio frequentior est in demonstrationibus scholasticis, quàm in populari usu. Prima tamen frequentior: secunda ad 31 p. 6. adhibetur ad insignem imprimis demonstrationem, ut ab Archimede ad circuli dimensionem. Tertia est additio omnium antecedentium ad omnes consequentes, ubi dantur consequentes quidem additi, antecedentes autem separati, tumque antecedentes omnes adduntur, & separati ad omnes consequentes concluduntur. Itaque sola hic fit additio antecedentium ad primum proportionis terminum constituendum. Hæc compositio utilitates infinitas habet, & propter quotidianum usum, in consortio & societate hominum, vulgò regula societatis appellata est, sed verius æquitatis & politiæ regula diceretur: & certè velut dea quædã iustitiæ & æquitatis suum cuiq; partitur, ac tribuit. Quapropter nobilitas tanta exemplis suis illustretur.

Duorum sociorum primus contulit aureos 8, secundus 6, unde lucrati sunt aureos 7, quantum singulis accedit: Quæstio additis antecedentibus ita solvetur.

	8	4
14 dant 7: ergo	6	3
	& contra fors concluditur:	
	4	8
7 dant 14: ergo	3	6

Hic & deinceps tertius terminus datur potestate, non actu, quod antea initio regulæ aureæ admonitum est. Tres mercatores contulerunt aureos, primus 90, secundus 60, tertius 50, lucrati sunt aureos 100, quantum singulis accedit: Adde antecedentes, ut antea, & concludere.

	90	45
200 dant 100: ergo	60	30
	50	25

Contrà

Contrâ singulares fortes ex additis consequentibus concludentur.

100 dant 200: ergo	45	90
	30	60
	25	50

Aurei 200 tribus ea conditione partiendi, ut primus triplo plus habeat quam secundus, & secundus quadruplo quam tertius, quota pars erit singulorum? Hic ab extremo incipe. Si tertius habeat 1, secundus habebit 4, & primus 12, quibus additis concludere.

12	141 $\frac{5}{17}$
17 dant 200: ergo 4	47 $\frac{1}{17}$
1	11 $\frac{13}{17}$

Hæc exempla speciem quandam iustitiæ habuerunt, sequentia longè sunt insigniora, in quibus iudex in tribunali sine compositionis hujus æquitate sit iniquus: Octo creditoribus debentur aurei, primo 100, secundo 86, tertio 75, quarto 60, quinto 54, sexto 32, septimo 24, octavo 15. Sed bona debitoris tantummodo valent aureos 150. Itaque omnibus omnino satisfieri non potest. Ac si totam summam primo summo jure persolveris: summam cæteris injuriam facies. Secundo enim 36 detrahes, nihil cæteris prorsus relinques. Ad compositionis igitur æquitatem recurretur, quantum singulis pro rata bonorum portione persolvendum sit, ex additis antecedentibus ita concludes:

100	33 $\frac{141}{117}$
86	28 $\frac{106}{117}$
75	25 $\frac{50}{117}$
446 dant 150: ergo 60	20 $\frac{117}{117}$
54	18 $\frac{36}{117}$
32	10 $\frac{170}{117}$
24	8 $\frac{18}{117}$
15	5 $\frac{10}{117}$

Contrâ

Hæreditas

Hæreditas 3000 relicta 5 fratribus ea conditione, ut obveniat primo $\frac{1}{2}$, secundo $\frac{1}{3}$, tertio $\frac{1}{4}$, quarto $\frac{1}{5}$, quinto $\frac{1}{6}$. Id uti proponitur fieri nō potest, quia ē datis partibus prima aufert 1500, secunda 1000, tertia 750, quod jam plus est toto. Itaque cæteris nihil relinqueretur. Atque ex illo summo jure summa item fieret injuria. Recurratur igitur ad compositæ proportionis æquitatem, & numerus inveniat minimum dividuus à datis partibus. Hic enim est usus talis numeri, quoniam data partes totum superant, & inventi partes inveniantur datis illis cognominibus, quæ æquabiliter 5 fratribus assẽm partiantur. Id verò per additionẽ partiũ absq; minimo dividuo fieri potest, sed expeditior erit numeratio per integros numeros dividui minimi beneficio repertos. Minimum igitur dividuus à datis partibus est 60, cujus partes partibus illis datis cognominibus, sunt 30. 20. 15. 12. 10. Has igitur partes adde, & dic per auream regulam,

30	1034 $\frac{42}{87}$
20	689 $\frac{17}{87}$
87 dant 3000: ergo 15	517 $\frac{11}{87}$
12	413 $\frac{69}{87}$
10	344 $\frac{72}{87}$

Tres partiũtur 100, ea conditione, ut primus capiat $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, secundus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, tertius $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$. Id item sicuti proponitur fieri non potest, quia primus & secundus auferunt plus toto. Acquitas igitur additionis adhibeatur. Itaque sumes primo minimum dividuum 60, cujus divisores datis partibus cognominibus, sunt 20 & 15 pro primo, 15 & 12 pro secundo, 12 & 10 pro tertio, quibus primum separatim additis sunt 35. 27. 22. Deinde simul sunt 84. Conclude igitur:

35	41 $\frac{2}{3}$
84 dant 100: ergo 27	32 $\frac{1}{7}$
22	26 $\frac{4}{11}$

Consimile est exemplum consequens, sed paulò plenius, & luculentius. Quatuor sic partiũtur 600 aureos, ut primus habeat $\frac{1}{2}$ & 9 aureos, secundus $\frac{1}{3}$ & 8, tertius $\frac{1}{4}$ & 7, quartus $\frac{1}{5}$ & 6. Hic item partes duæ primæ superant totum, neque quidquam cæteris præterea relinquitur. Ad illud igitur proportionalis æquitatis judicium refugiamus, & quinque in hoc exemplo superiorum dissimilia distinguamus. Primo à nominibus propositarum partiũ assumẽdus minimus divi-

dividens est, sic erit 120. Secundo partes cognomines inveniendæ. Tertiò inventa per suos numeros multiplicandæ itaq; $\frac{1}{2}$ erunt 80: $\frac{1}{3}$ 72: $\frac{1}{4}$ 100: $\frac{1}{5}$ 105: quæ additæ erunt pro antecedentibus additis. Quartò à 600. summa dividenda tollantur integri numeri 9. 8. 7. 6. id est 30, manebunt 570 pro additis consequentibus. Quintò denique inventis quartis proportionalibus, addes primo 9, secundo 8, tertio 7, quarto 6. Totum exemplum sic erit.

80	136 $\frac{164}{337}$	
357 dant 570: Ergo	72	122 $\frac{111}{337}$ vel $\frac{114}{119}$ per 3
	100	166 $\frac{237}{337}$ vel $\frac{72}{119}$ per 3
	105	173 $\frac{231}{337}$ vel $\frac{11}{17}$ per 21.

Triplici verbò additionis compositioni triplex subductionis divisio potest opponi. Prima est subductio differentiarum antecedentis à consequente: ut 7 ad 3, sic 14 ad 6: ergo ut 4 ad 3, sic 8 ad 6. Secunda est subductio similis ablati: ut 12 ad 2, sic 18 ad 3. ergo ut 8 ad 2, sic 12 ad 3: itemque ut 4 ad 2, sic 6 ad 3: utrobique enim tollitur subsequalterum. Tertia est subductio differentiarum antecedentis ab antecedente ad differentiam consequentis à consequente: ut 12 ad 9, sic 8 ad 6: ergo ut 12 ad 9, sic 4 ad 3. Postremæ divisionis hujus in scholasticis demonstrationibus usus est permagnus & his verbis. Si fuerit ut totus ad totum, sic ablati ad ablatum, erit ut totus ad totum, sic reliquus ad reliquum: usus tamen vulgaris non perinde hic patefactus est. *ἀντιγραφὴ* id est inversio additur, quæ est subductio antecedentis ad suam differentiam supra consequentem: ut 6 ad 4, sic 3 ad 2, ergo ut 6 ad 2, sic 3 ad 1. Hujus divisionis exēpla in demonstrationibus aliquando reperies.

CAP. X. DE ALLIGATIONE.

Alligatio est variorum generum permixtio, unde medium temperatur: ut in agranis liquoribus, metallis, pretiis, ponderibus, mensuris, omnibusq; rerum, quæ quidem misceri, temperarique possint, generibus: In rebus autem physicis mirabiliter excellit hæc species compositionis altera, ut superior excelluit in politicis. Per se vero alligatio nulla est proportio, sæpè tamē proportionem utitur, & quidē sæpè superiore proportionis additione. Alligatio est mediū quæsitū vel datum. Prima datis extremis quarit mediū divisione additorum per ipsorum numerum: ut si duo sint extrema per 2: si tria per 3: & sic deinceps: ut modius tritici 16 solidorum cum modio secalis 12 miscendus sit, addes 16 & 12, & totum 28 divides per 2, quotus 14 ostendet pretium tertii misti. Hic medium est Arithmeticum quoties extrema duo sunt. Si miscendus sit cum utroque modius hordei 10 solidorum tria pretia addita 38 dividantur per 3, quotus 12 $\frac{2}{3}$ ostēdit pretium quarti misti.

Secunda alligatio est æquatio dati mediū per inæqualium extremorum alternas ab

c 2 eo diffe

rimo $\frac{1}{2}$ secundum
quia ē datis
us est toto. I
na item fieret
, & numerus
alis numeri,
r datis illis co
er additionē
eratio per in
r dividuus à
sunt 30. 20.

duis $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, ter
& secundus
ne sumes pri
omines, sunt
s primum se
itur:

entius. Qua
undus $\frac{2}{3}$ & 8,
tum, neque
alis æquita
dissimilia di
us minimus
divi

eo differentias: æquatur autem medium datum nunc mensura, nunc pondere, nunc numero quæstorum generum: ut sic duobus vini generibus, quorum primi pinta valeat denarios 6, secundi 12, miscendum sit, cujus pinta valeat 10: alternæ differentiæ extremorum 6 & 12 à medio 10, erunt 2 & 4, quæ significabunt, si 2 pintæ sumantur primi generis 4 assumendas secundi: itaque si pintæ 6 miscenda sint, alligatio sine ulla proportionē perfecta erit, ut hic vides:

6	2
10	
12	4

Alligationis hujus causa est ē communibus regulis multiplicationis. Nam si multiplices 10 per 6, facies 60: item si multiplices 10 per 2 & 4 segmenta senarii multiplicantis, facies 20 & 40 æquales ipsi 60: quia idem est multiplicare per totum & per partes: tūc si per eadem segmenta 2 & 4 multiplices totum 10 altero segmento, nunc imminutum, nunc auctum, id est per 6 & per 12 facies 12 & 48 eidem 60 æquales, ut hic vides:

10	10	10	6	12
6	2	4	2	4
60	20	40	12	48

At 2 pintæ primi vini per 6 pretium multiplicatæ faciunt denarios 12: & 4 pintæ secundi vini per denarios 12 pretium multiplicatæ, faciunt 48. Tum 12 & 48 sunt denarii 60: item 2 pintæ per 10, & 4 pintæ per 10 faciunt denarios 20, & 40, id est 60. Itaque quod pintæ simplices valebant, temperatæ pintæ valent idem. Ideoque in hac temperatione differentia à medio alligantur extremis alternis: suis autem extremis alligatæ facerent plus vel minus, ut hic vides:

8	10	14	12	10	6
2		4	2		4
16		56	24		24
	22		84		

Quare per alternas extremorum differentias alligatio facienda est. Neque medius alligationis terminus est proportionis, sicuti neque alligatio ipsa est ulla proportio, sed medius quantitate inter inæquales extremos: estq; minor maiore extremo, maior minore. Nec alligatio ipsa (ut dixi) proportio est, cum sine ea fiat, nec cum proportionē utitur, necessario proportionis additionem adhibet, qualis est in permiscendis metallis quotidiana ratio, ut si aurifex habeat 100 pondo argenti, quorum quodlibet valeat 17: item alteram habeat infinitā mafam,

fam, cuius pondo valeat 24: quantum argenti ē secunda massa addet primæ, ut pondo valeat 22, & quantum omnino futurum est: Alligatio alternarum differentiarum sic erit.

$$\begin{array}{r} 17 \quad 2 \\ 22 \\ 24 \quad 5 \end{array}$$

Vnde concludes, 2 pondo primi argenti, 5 pondo secundi requirunt: ergo 100 requirunt 250, quibus adde 100 ē prima massa, habebis 350 pōdo misti argenti. Sed alligationis quaestio rara est, sine proportionis additione, ut in exemplo primo. Si unus sextarius temperandus esset ē duobus illis generibus, tum alligatione facta, diceretur non peti 6, sed 1. Itaque proportionis additio id explicaret hoc modo. 6 redeunt ad 1: ergo 2 redibunt ad $\frac{2}{6}$ id est $\frac{1}{3}$: 4 redibunt ad $\frac{4}{6}$ id est $\frac{2}{3}$, totaque quaestio sic erit.

$$\begin{array}{r} 6 \quad 2 \quad 2 \quad \frac{1}{3} \\ 10 \quad 6 \quad 1 \quad 2 \\ 12 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \end{array}$$

Tale est Archimedeum problema illud apud Vitruvium lib. 9. ca. 3. de aurea regula Hieronis regis corona ad deprehendendum aurificis furtum. Sed in hoc exemplo Physica consideratio fuit, non tantum ponderis, sed densitatis & raritatis, ut tanto plus minusve loci occuparetur. Duas (inquit Vitruvius) massas ejusdem ponderis cum regia corona Archimedes fecit, alteram auream, argenteam alteram, quibus vicissim in vas aqua plenum demissis, ē differentia effusae aquae ad auream massam & argenteam, item ad regiam coronam, deprehendit argenti in aurea corona mitionem. Esto igitur inaequalis effusio aquae ex aurea massa 20, ex argentea 36, ex ipsa regis corona 24. Sumptis differentis vides aurī triplum, argenti subtriplum in corona permixtum esse. Et si corona 16 pondo esset, essent librae auri 12, argenti 4, & hac alligatio est sine proportionē. At si alterius ponderis ea fuerit, similem rationem proportionis additione concludes: ut si fuerit 100 pondo, quaestiois explicatio tota sic erit.

$$\begin{array}{r} 20 \quad 12 \quad 12 \quad 75 \\ 24 \quad 16 \quad 10 \quad 25 \\ 36 \quad 4 \quad 4 \quad 25 \end{array}$$

Alligationis causa eadem fuerit, ubi termini non tantum tres, sed quotlibet proponuntur: Bini siquidem extremi ad unum medium perpetuo conferendi, & differentiae ad unum extremum alligandae & per additionem colligendae. Alligatio autem complurium terminorum multis modis fieri potest, sed primus & promptissimus modus binos terminos semel alligare, si multitudo sit par mi-

6 3 norum

nunc pondere,
s, quorum pri
valeat 10: al
significabūt,
si pinta 6 mi
es:

tionis. Nam si
menta senarii
iplicare per to
otum 10 alter
12 facies 12 &

rios 12: & 4:
48. Tum 12 &
cnarios 20, &
inta valentia
extremis alter
des:

est. Neque
io ipsa est ul
& minor ma
est, cum sine
ionem adhi
habeat 100
infinita ma
sam,

norum parte una & majorum parte altera, secus alligandum erit idem pluribus: ut Monetarius habet genera quatuor argenti, primum est 3 denariorum, secundum 5, tertium 8, quartum 10, quarit quintum genus 6 denariorum. Exemplum totum sic erit.

3	4
5	2
6	3
8	1
10	3

Hic si decem pondo misti ac temperati ē, quatuor generibus argenti quarantur, sumentur 4 primi: 2 secūdi: 1 tertii: 3 quarti: sin plura, proportio explicabit. In hoc igitur exemplo par est utrinque multitudo differentiarum: in proximo secus est, unus enim & idem ter alligatur: ut vini genera quatuor sunt, primi q̄ amphora valeat 7, secundi 9, tertii 10, quarti 12, & miscenda sint amphoræ 300, quæ singula valent 11, dispositis terminis, differentiisq̄ alterne alligatis tota questio sic erit.

7. 1	1	30
9. 1		
10. 1	1	30
11. 10	300	1 30
12. 4. 2. 1.		
		7. 210

In proximo exemplo quia numerus extremorum par est utrinque singuli semel alligabuntur, mercator emerit 400 pondo aromatū sextuplicis generis libellis 200, & quarat quot pondo singulorū generum sit accepturus. Hæc questio dissimilis est superioris illius ad quintum caput de æquali numero singulorum generum. Hic enim quaritur quicunq̄ possit esse singulorum generum numerus, non quaritur æqualis: positis igitur singulorum generum pretiis, primi 6, secundi 7, tertii 9, quarti 11, quinti 12, sexti 16, medium pro arbitrio ubi voles assumetur. Sumatur in medio & sit 10. Alligatio hic erit alternis singulorum semel sic.

6 6	6	141 $\frac{1}{17}$
7 2	2	47 $\frac{1}{17}$
9 1	1	23 $\frac{9}{17}$
10 17 400		
11 1	1	23 $\frac{9}{17}$
12 3	3	70 $\frac{10}{17}$
16 4	4	92 $\frac{1}{17}$

Atqui

Atqui in hoc quaestione genere si medius quantitatis terminus nullus sit, non est explicabilis per alligationem, quaestio huiusmodi.

CAP. II. DE COMPOSITA PROPOR-
tione per multiplicationem solam.

Compositio terminorum prima ejusmodi fuit in additione, & contra deducitio quaedam in alligatione: secunda sequitur quae fit terminis multiplicatis, cum pro binis simplicibus assumuntur duo ab his facti: sed multiplicatio interdum sola est, interdum etiam additio, multiplicationis solius exempla prima sunt: ut aurei 3 mensibus 2 lucrantur aureos 6: aurei 4 mensibus 3 quot lucrantur. Termini sic erunt.

$$\begin{array}{r} 3 \quad 6 \quad 4 \\ \frac{2}{6} \quad 6 \quad \frac{3}{12} \quad 12 \end{array}$$

Facit autem nomen accipient ab utrolibet factore, ut hic dies vel aurei 6, lucrantur aureos 6, vel menses 6 lucrantur aureos 6, verum ubi accidet terminum antecedentis aequalē esse termino consequentis, iis sublati, tres reliqui proportionem eandem concludent, quia facti per eundem sunt, ut hic resectis 3 & 3, concludes nihilominus 2. 6. 4. 12. Item modius tritici 15 solidorum dat panem 8 unciarum, 2 denariis. Ergo modius 20 solidorum dat panem 15 unciarum 5 denariis. Exemplum sic est.

$$\begin{array}{r} 15 \quad 2 \quad 20 \\ \frac{8}{160} \quad 2 \quad \frac{15}{300} \end{array}$$

Vel sic sublati terminis aequalibus 8. 2. 20. 5. Sed pluribus exemplis res illustratur, Pondo 100, miliaria 20 vehuntur 36 libellis, ergo pondo 50 millia 12 vehuntur. 10 $\frac{4}{5}$ ulnae panni lati $\frac{3}{4}$, vaneunt 6 libellis, ergo 40 ulnae lati ulnam 1 $\frac{2}{5}$ vaneunt. 35 $\frac{5}{9}$.

Aulaum longum ulnae 2 & $\frac{1}{2}$, latum 2 emittit 50 libellis, ergo taperum ejusdem generis alterum longum ulnam 1, latum $\frac{3}{4}$ emittit 18. 5. d. 3. Boves 10 arant diebus 7 iugera 35, ergo boves 20 arabunt diebus 24 iugera 240. Huius generis compositione saepe quaestio prima alligationis explicatur: Sunt 10 modii tritici assium sedenorum, seralia 18 duodenorum, facti a 10 & 18, item ab 18 & 12 sunt 160, 216, & ex iis additis totus erit 376, numeri reum 10 & 18 sunt 28, tum denique proportio concludet, 28 dant 376, ergo 1 dabit 13 $\frac{2}{7}$. Exemplum sic erit.

$$\begin{array}{r} 10 \quad 18 \\ \frac{15}{160} \quad \frac{12}{216} \\ 28 \quad 376 \quad 1 \quad 13 \frac{2}{7} \end{array}$$

Sunto

Atqui

Sunto eadem genera frumenti modii 54, tritici pretij 16, secalis 30, pretij 12, hordei 23, pretij 10, procedes ut antea. Exemplum sic erit.

54	16	864
30	12	360
23	10	230
107	1454	1. 13 $\frac{4}{107}$

Si partes generum miscendæ sint, erit eadem ratio, nisi quod pro iis sumitur ab iis minimus dividius & partes datis cognomines.

Esto pondo caryophili 36 assium, cinnami 15, piperis 13, & velis miscere primi generis $\frac{1}{2}$, secundi $\frac{1}{3}$, tertii $\frac{1}{4}$. Minimus dividius ab iis partibus est 12, & partes cognomines sunt 6.4.3. totumque exemplum sic erit.

6	36	216
4	15	60
3	13	39
13	315	1 24 $\frac{3}{13}$

Proportio hæc interdū invertitur multiplicatis inter se primo & quinto, item secundo & quarto ad fractionem primi & tertii: ut 2 messores demerunt 6 jugera 4 diebus: 3 messores 12 jugera quot diebus demetēt reperies 2, exemplū sic erit.

2	4	8
6		12
24		48
4		2

Sic reciprocatio manifesta est ut primus: vel inversio sic.

2	24	4	48.
---	----	---	-----

CAP. XII. DE PROPORTIONE COM- posita per multiplicationem & additionem.

Compositio multiplicationis simul & additionis, est quæ oblatos terminos primo multiplicat, tum ab illis factos addit, ut, Trium mercatorum primus contulit aureos 44 per 3 menses, secundus 32 per 6 menses, tertius 24 per 4 menses, unde lucrati sunt aureos 80, quantum singulis ex hoc lucro cedit: Multiplica sortem quamque cum suo tempore, primi compositus erit 352, secundi 192, tertii 96, & singulis jam additis dicito.

640 dant

lis 30, pretii 12,

640 dant 80. ergo $\begin{array}{r} 352 \quad 44 \\ 192 \quad 24 \\ \hline 96 \quad 12 \end{array}$

Legio habet pedites 6100, equites 726, & peditis stipendium est 4 aurei, equitis 9, præda aureorum 200 his dividenda, quantum singulis dabitur: multiplica numeros personarum & stipendiorum, primus factus erit 24400, secundus 6534, tum facti addantur, erunt 30934, & dic:

pro iis sumitur

30934 dant 2000: ergo $\begin{array}{r} 24400 \\ 6534 \\ \hline 1577 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17082 \\ 30934 \\ \hline 13852 \end{array}$ vel $\begin{array}{r} 3541 \\ 13852 \\ \hline 15467 \end{array}$

velis miscere pri,
est 12, & partes

Canonici 12 & facellani 20 partiuntur quotannis aureos 3000, sed ea lege ut canonicus 5 capiat, quoties facellanus 4, quantum igitur eorum stipendium est annuum: multiplica numeros personarum & stipendiorum, primus erit 60, secundus 80, qui additi sunt 140: dicigitur.

$\begin{array}{r} 60 \quad 1285 \frac{5}{7} \\ 140 \text{ dant } 3000: \text{ ergo } \\ 80 \quad 1714 \frac{2}{7} \end{array}$

& quinto, item
netunt 6 jugera
exemplū sic erit.

Interdum faciendi complures ē variis generibus sortium & temporum, in unum tandem omnes addendi, ut Quatuor mercatorum biennii societate ini-
ta, primus 30 aureos contulit, sed octavo post mense 10 subduxit, iterumque vi-
cesimo mense ineunte 12 contulit: secundus initio 24 contulit, ac sexto post exa-
cto mense subduxit 8, denuoque sexti decimi mensis initio 14 retulit: tertius ini-
tio contulit 20, & septimo post exacto mense 8 omnes subduxit, sed decimo se-
ptimo post exacto mense 16 retulit. Quartus septimo mense ineunte 18 aureos
contulit, sed quarto post exacto mense 9 subduxit, iterumque decimo septimo
mense incipiente 15 addit: lucrum ex omnibus his summis factum est 100 aureo-
rum. Quæritur lucrum singulorū. Hic quæstio laboris multo plus habet, quā-
m quæstionis explicatio: itaq; totam & quæstionem, & quæstionis explicationem
subtiliter adscripsi, ut hic vides.

30	8	240	
20	11	220	620
32	5	160	
<hr/>			
24	6	144	
16	9	144	558
30	9	270	
<hr/>			
20	7	140	
0	10		252
16	7	112	
<hr/>			
0	6	0	

M-

atos terminos
itorum primus
rtius 24 per 4
cro ceder: Mul-
it 352, secundi

640 dant

f 18 4

18	4	72	318
9	6	54	
24	8	192	

Hic sortes & tempora in suum compositum habes reducta. Nam primi 30 aurei & 8 menses faciunt 240: Deinde reliqui 20 aurei & 11 menses faciunt 220. Postea 20 aurei & 12, id est 32 & menses 5 faciunt 160. Denique facti tres additi sunt 620. Secundi mercatoris 24 aurei & 6 menses faciunt 144. Deinde reliqui 6 & 9 menses faciunt 144, tum aurei 14 & 15 id est 30, cum 9 mensibus faciunt 270. Hi tres facti additi sunt 558. Tercii 20 aurei & 7 menses faciunt 140: Deinde 15 aurei & menses 7 faciunt 112, hic factus additus priori, constituit 252. Quartii 18 aurei & 4 menses faciunt 72, tum 9 aurei & menses 6 faciunt 54. Denique 9 & 15, id est 24 aurei & 8 menses faciunt 192, quatuor facti additi sunt 318. Colligamus itidem hos quatuor compositos, & concludamus principem proportionem.

620	35	$\frac{205}{437}$
558	31	$\frac{403}{437}$
252	14	$\frac{277}{437}$
318	18	$\frac{81}{437}$

In hanc etiam speciem incident alligationes ignoti medii, quoties maior expetetur numerus, ut in illo frumentorum exemplo si pro 13 expeterentur 100. exemplum sic esset.

13.	100	6	$46\frac{2}{3}$
		4	$30\frac{10}{13}$
		3	$23\frac{1}{13}$

CAP. XIII. DE PROPORTIONE TERMINIS CONTINUATA
ad inveniendum minimos terminos in datis rationibus.

Proportio multiplex terminis composita adhuc fuit, superest terminis continuata. Proportio terminis continuata est quando antecedens rationis aliquis terminus continuatur in consequente: ut inventio minimorum numerorum in datis rationibus & æquatio. Si datis rationibus quolibet in minimis terminis proportionales ad secundum & tertium minimi multiplicent oblique terminos duarum primarum rationum, facti erunt continuè minimi in datis rationibus: Deinde si proportionales ad postremo inventum & antecedentem consequentis rationis minimi multiplicent oblique, alter inventos, alter sequentes omnes, facti erunt continuè minimi in datis rationibus, ut hic vides.

5	6	4	3
10	12	9	

Nam si sumas minimos ad 6 & 4, habebis 3 & 2, tum si multiplices oblique 5 & 5 per 2, facies 12 & 10. Item si per 3 multiplices oblique 4 & 3 facies 12 & 9
continuè

continuè minimos in datis rationibus: ut enim 5 ad 6, ita 10 ad 12, & ut 4 ad 3 sic 12 ad 9. Hic aut continuatio terminorū est in datis rationibus, ut regula præcipit: non aut continuatio rationum, & hæc proportio diffundit est rationibus continua tantum terminis minimis in datis rationibus. Esto & aliud exemplū.

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 12 & 15 & & & \\ 16 & 24 & 30 & 35 & & \end{array}$$

In hoc exemplo proportionales ad 15 postremo inventum, & 6 antecedentem sequētis rationis minimi sunt 5 & 2, qui multiplicatione obliqua fecerunt 16.24.30.35. Denique hac regula continuabis quotlibet minimos in datis rationibus minorum numerorum: habet verò & hæc continuatio usum valde singularem ad illam politicam iustitiæ ideam, de qua in additionis compositione diximus: Atque ut res ipsa clarius fiat & illustrior, audiatur iustitiæ consultus & magister ille de liberis & posthumis hæredibus instituendis, julianus enim generis hujus quæstionem proponit Digest. lib. 28. Si ita scriptum sit (ait) si mihi filius natus fuerit, ex hære hæres esto, ex reliqua parte uxor mea hæres esto. Si verò filia mihi nata fuerit, ex triente hæres esto, ex reliqua parte uxor mea hæres esto: & si filius & filia nati essent, dicendum est assem distribuendū esse in 7 partes, ut ex his filius 4, uxor 2, filia 1 partem habeat. Ita enim secundum voluntatem testantis filius altero tanto amplius habebit quàm filia. Licet enim subtili juris regulæ conveniat ruptum fieri testamentum: attamen cum & utroque nato testator voluerit uxorem aliquid habere, ideo ad ejusmodi sententiam humanitate suggerente decursum est, quod etiam Iuvenio Celso apertissime placuit: Hæc jureconsultus de uno & singulari theorematibus hujus exemplo, at præstat theoremata ipsum ut generale est, ita generaliter instituit. Hic igitur intelligimus ex voluntate testatoris tres numeros inveniendos esse continuè minimos in datis rationibus $\frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{3}$ id est in rationibus 2.1|2.1. qui erunt 4.2.1. Ac si hæreditas fuerit 70 coronatorū ex additis illis terminis quæstio herciscundæ familiæ ita solvetur.

$$\begin{array}{r} 4 \quad 40 \\ 7 \text{ dant } 70: \text{ergo } 2 \quad 20 \\ 1 \quad 10 \end{array}$$

In hoc exemplo accidit rationes continuari: at si uxor duos filios & totidem filias pepererit neque septenarius Iuliani sufficeret neque rationes continuabuntur, sed tres quaternarius pro tribus filiis, binarius unus pro matre, duæ unitates pro duabus filiabus assumenda: adde igitur omnes & conclude.

$$\begin{array}{r} 4 \quad 17 \frac{1}{2} \\ 4 \quad 17 \frac{1}{2} \\ 16 \text{ dant } 70: \text{Ergo } 4 \quad 17 \frac{1}{2} \\ 2 \quad 8 \frac{3}{4} \\ 1 \quad 4 \frac{3}{8} \\ 1 \quad 4 \frac{3}{8} \end{array}$$

f 12 Similia

Similia sunt illa. Partiat pater tribus filiis 100 aureos ea conditione, ut quoties primus 5 capit, toties secundus 6 capiat, & quoties secundus capit 7, toties tertius capiat 9: quot aureos singuli capient? Hic duæ sunt rationes in minimis terminis 5 ad 6, 7 ad 9, in quibus rationibus proportionales minimi continui sunt 3.5.4.2.5.4. hoc modo.

$$\begin{array}{ccc} 5 & 6 | 7 & 9 | \\ 35 & 42 & 54 \end{array}$$

Adde igitur tres continuos repertos, totus erit 131. & jam dicito,

$$\begin{array}{ccc} 35 & 62 & \frac{94}{131} \\ 131 \text{ dant } 100: \text{ergo} & 42 & 32 \frac{8}{131} \\ & 54 & 41 \frac{29}{131} \end{array}$$

Augeatur verò numerus hæredum, & quatuor hæredibus 100 ita dividatur, ut quoties primus capit 3, secundus capiat 4, & quoties secundus capit 5, toties tertius capiat 6. Denique quoties tertius capit 7, toties quartus capiat 8: quot aurei singulis cedent: hic sunt tres rationes in minimis terminis dissimiles: 3 ad 4, 5 ad 6, 7 ad 8, in quibus continui termini sunt 105, 140, 158, 192. adde continuos, totus erit 605: & dicito

$$\begin{array}{ccc} 105 & 17 & \frac{41}{605} \\ 605 \text{ dant } 100: \text{ergo} & 140 & 23 \frac{17}{605} \\ & 168 & 27 \frac{23}{605} \\ & 192 & 31 \frac{29}{605} \end{array}$$

CAP. 14. DE AEQVATIONE.

Esmodi igitur est inventio minimorum in datis rationibus: superest æquatio, id est continuatio duorum ordinū binis numeris proportionalium: Ita, que extremi remotis mediis sunt proportionales, neque continuatio rationum hic expetitur, sed terminorum tantummodo: æquatio est ordinata vel perturbata: æquatio ordinata est æquatio secundum eundem ordinem numerorum. Ita, que primi secundis, secundi tertiis sunt proportionales: ut hic vides in tribus exemplis, quæ continuari in unum possunt.

$$\begin{array}{ccc} 9. & 6. & 3. | 9. & 6. & 9. | 3. & 6. & 9. \\ 12. & 8. & 4. | 12. & 8. & 12. | 4. & 8. & 12. \end{array}$$

Hoc genere proportionis plurimæ in elementis demonstrationes à Theone conclusæ sunt: potes autē in exemplo continuare æquationem proportionibus octo: dicique septem intermissis proportionibus, ut 9 ad 9, sic 12 ad 12, æquatio turbata est quando fuerit ut primi ordinis primus ad secundum, sic secundi secundus ad tertium: utque primi secundus ad tertium, sic secundi primus ad secundum: ut vides in tribus exemplis separatis non continuis.

$$\begin{array}{ccc} 9. & 8. & 6. | 9. & 8. & 9. & 32. & 16. & 8 \\ 24. & 18. & 16. & 16. & 18. & 16 & 8. & 4. & 2 \end{array}$$

Hic enim

Hic enim ut 9 ad 8, sic 18 ad 16: item ut 8 ad 6, sic 24 ad 18, & similiter in verso ordine in reliquis exemplis. Difficile autem sit in numeris integris terminos proportionis in versè æquatos continuare: continuari tamen possunt ordine non solum in verso, sed in contrarias partes tendente: ut hic vides

6. 3. 2. 1. 3. 4. 3. 1. 2.
12. 24. 8. 6. 8. 24. 12. 8. 4.

Hoc proportionis genus minus usitatum est, ea tamen Archimedes utitur 4 theoremate 2. de Sphæra, & 9. Theor. 2. Morro.

CAP. XV. DE CONTINUAE
proportionis proprietate.

Proportio disjuncta generatim descripta est, jam tēpus est de continua dicendi, quando quæ ratio est primi termini ad secundum, eadem est secundi ad tertium: ut in 2. 4. 8. De proportionē continua & simplici in tribus terminis vel multiplici, in longius continuis similia ferè præcipiuntur ijs quæ præcepta sunt in proportionē disjuncta. Proprietas primò duplex deducitur è duplici proprietate disjunctæ proportionis. Si tres numeri sunt cōtinuè proportionales, maximus & minimus majores sunt medio: ut in 2. 4. 8. 10 superant 4: neque tamē cōvertitur magis quàm antea. Secunda autem proprietas est reciproca. Nam 16 factus à 4 medio est æqualis ipsi 16 factus à 2 & 8 extremis, & vicissim, cum equalitas ista sit, tres numeri sunt proportionales. Hic enim medius est pro duobus. Itaque quod aurea regula docuit de quatuor disjunctis, id nunc continua proportio assumit in tribus cōtinuis. Hinc etiam patet inventio proportionalis sive medij sive extremi. Nā si factum à duobus tertius per se dividerit, erit medius proportionalis, ut 4 per 4 dividit 16 factum à 2 & 8, & medius est proportionalis inter 2 & 8. Item, Si primus dividerit factum à secundo, quotus erit illis tertius proportionalis, ut in eodem exemplo datis 2 & 4, primus 2 dividat 16 factum à 4 secundo, quotus 8 erit tertius illis cōtinuè proportionalis. Itaq; regula hic aurea etiam est, sed in tribus numeris, quæ ante fuerat in quatuor, hinc varia sequuntur: primò. Si duo numeri habeant tertium proportionalem, erunt compositi inter se, ut in eodem exemplo 2 & 4. Ideoq; si primi sint inter se, nō habebūt proportionalem tertium: ut in 2. 3. Nam si 9 factum à 3 dividas per 2, quotus erit $4\frac{1}{2}$, qui numerus non est integer.

CAP. XVI. DE INVENTIONE
cōtinuè proportionalium.

HÆc proprietas est proportionis continuæ & simplicis ad inventionem tertij proportionalis. Sed proportio continua quotlibet terminis continuari potest,

f 3

potest, tumque ratio primi ad secundum duplicatur in tertio, triplicatur in quarto, & sic deinceps uno minus: ut in 1. 2. 4. ratio 1 ad 4 est ratio 1 ad 2 duplicata in 1. 2. 4. 8. ratio 1 ad 8 est ratio 1 ad 2 triplicata, ratio nempe extremorum colligitur ex omnibus intermediis, ut antea patuit. In hac progressionē plurima spectari possunt: ut si primus dividat secundum dividet consequentes omnes, si dividat ultimum dividet secundum, sed præcipue spectatur inventio terminorum vel summa. Inventio terminorum multiplorum facilis est multiplicando ultimum per nomen rationis, non item in reliquis generibus: theorema tamen inventionis hujus commune est, è datis duobus cujuscunque rationis sic est. Si duo datæ rationis numeri multiplicentur uterque per utrumque, fient tres continuè proportionales datis: tum si facti multiplicentur per datum antecedentem, denuoque ultimus per datum consequentem, quatuor fient continuè proportionales datis, & sic deinceps inveniētur quolibet in data ratione, ut hic vides.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 2 & & 3 & & \\
 & 4 & & 6 & & 9 & \\
 8 & & 12 & & 18 & & 27 \\
 16 & & 24 & & 36 & & 54 & & 81
 \end{array}$$

Hoc exemplum fuit rationis superpariculis, via eadem erit in reliquis generibus. Hinc etiam sequitur inventio minimorum, si nempe dati sint minimi. Extremi enim erunt primi, quia facti à primis inter se, vel à primis per primos. at si continuè proportionales sint, extremorum inter se primorum erunt minimi, & contrā, ut in eodem exemplo patet. Itaque si continuatio sit extremorum inter se, primorum erit maxima. Ex hac inventionē duplex inventio alia sequitur, prima. Si duo numeri habuerint continuè medios, proportionales datis habebunt medios totidem, ut in eodem exemplo. Secunda. Quot continuè medios habent primi inter se, totidem habeant ad unitatem. Et quot medios habent duo numeri, & unitas, dati totidem habent: ut in eodem exemplo si proponatur unitas, ut hic vides.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 2 & & 3 & & & \\
 & 4 & & 6 & & 9 & \\
 8 & & 12 & & 18 & & 27 \\
 16 & & 24 & & 36 & & 54 & & 81
 \end{array}$$

Ex hoc autem confectario secundo sequitur inventio cujuscunque optati termini è multiplicibus. Si termini progressionis arithmetice ab unitate, terminis geometricæ progressionis à datæ rationis primo multitudinis numero respondeant, factus à duobus geometricis, erit progressionis suæ terminus uno major quam est simul uterque arithmeticoz multiplicatis respondentium, ut in hac progressionē dupla.

$$\begin{array}{cccccc}
 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. \\
 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64
 \end{array}$$

• Itaque

Itaque si quæras terminum progressionis octavum, adde arithmeticos terminos constituentes septimum, ut 3 & 4, & multiplica geometricos ijs respondentes 8 & 16. facies 128 octavum terminum progressionis. Sic erit in hac progressionem tripla.

1	2	3	4	5	
1	3	9	27	81	243

Si quæras decimum, multiplica 243 per 81 respondentes arithmetici 4 & 5, constituentibus nonum, facies 19683 decimum terminum. Hæc termini optati est inventio. Observata verò est hæc inventio in hac multiplici continuatione ex arithmetica locorum progressionem, ut regula instituit, quia primus multitudinis numerus multiplicans secundum facit tertium, hoc in primo loco singulare jus est, secundus multiplicans tertium facit non jam quartum, sed uno plus id est quintum, tertius multiplicans quartum facit, non quintum, sed plus duobus, id est septimum, & sic deinceps. Causa verò est tam disparis accretionis proportionalium proprietas, quia quot inter unitatem & secundum & duobus multiplicatis, intercedunt continuè medii, tot inter secundum & multiplicatis & optatum intercedunt. Omnis enim progressio multiplicium est ab unitate, quia numerus multitudinis quilibet est multiplex ad unitatem. Ideoque inventio optati est in solis multiplicibus, quorum nempe primus terminus possit esse unitas: in reliquis rationum generibus non est, in quibus neque unitas potest esse primus terminus, neque ideo progressio potest infinitè ab unitate perpetuari.

CAP. XVII. DE INVENIENDA

summa progressionis geometricæ.

A Tque hæc de inventionem continuorum, summa sequitur: Si tollatur primus à secundo & ultimo, erit ut reliquus secundus ad primum, sic reliquus ultimus ad ultimum præcedentes omnes. Ideoque, si quartus (qui sic erit ad reliquum ultimum, ut reliquus secundus ad primum) addatur ultimo totus, erit summa, ut hic vides.

2	4	8
	2	6

Tollatur 2 à 4 & ab 8, ut 2 reliquus secundus est ad primum 2, sic 6 reliquus ultimus est ad 4 & 2 præcedentes: utrobique enim est æqualitas. Proportiones sunt igitur 2.2.6.6, jam 6 addatur 8 ultimo, summa progressionis erit 14. Sic in

2	8	32
	6	30

Tollatur

Tollatur 2 ab 8 & 32, manent 6 & 30, utq; 6 est ad 2, sic 30 est ad præcedentes, ideoq; triplus: proportionales igitur erunt 6. 2. 30. 10. Iam denique 10 addatur 32, totus 42 erit summa progressionis. Fac periculum in maiore progressionē, ut hic uides.

2	4	8	16	32	64
	2				62

Tollatur 2 à 4 & 64. manent 2 & 62: utq; 2 est ad 2, sic 62 ad præcedentes, ideoq; æqualis est illis, proportionalesq; ita sunt 2. 2. 62. 62. Quapropter 62 addantur 64, totus 126 erit progressionis summa.

Agricola promissit filio suo pro xenijs primo anni die in triginta continuos dies modios tritici primo 1, secundo 2, tertio 4, & sic deinceps duplicando: queritur tricesimo die quot modii futuri sint. Quærat tricesimus terminus, id est ultimus progressionis hujus, ut antea demonstratum est: primo sextus 64 per sese faciet 4096 pro duodecimo termino: ut hic rursus ex sese faciet 16777216 pro vicesimo quarto termino, quem multiplica per 32 quintum terminum, facies pro vicesimo nono termino 536870912, qui tricesimus erit, si unitas pro primo numeretur. Tollatur igitur unitas à secundo & ultimo, exuperantia secundi erit æqualis primo. Itaq; inventus ultimus uno dempto erit æqualis omnib. antecedentibus. Addatur uterq; summa tota erit 1073741823. Regula plura ponderandi paucis ponderibus deducitur æ geometrica progressionē, quæ libripēdi singularem commoditatem suppeditat: ideoq; ad extremum addenda visa est, ut in proximo exemplo.

Libræ terminis duplæ & triplæ continuationis comprehense, totidem cognominibus ponderibus appenduntur. Id verò fit nunc additione ponderis ad pondus, nunc subductione & ad oppositam lancem additione. Sic libræ usque ad 7 appenduntur tribus ponderibus, quorum primum unius libræ, secundum binarium, id est duarum librarum, tertium quaternarium; quia progressionis 1. 2. 4. termini tantum comprehendunt: sic libræ usque ad 15 appenduntur 4 ponderibus hac progressionē significatis 1. 2. 4. 8. Sic libræ 31 ponderibus hujus continuationis 1. 2. 4. 8. 16. Sic in tripla ratione, libræ usque ad 40, appenduntur ponderibus hac progressionē significatis 1. 3. 9. 27. Sic libræ usque ad 121 appenduntur his ponderibus 1. 3. 9. 27. 81. & sic deinceps libræ terminis triplæ progressionis comprehensæ, totidem cognominibus ponderibus appenduntur.

F I N I S.

47 = I

P. RAMI GEO-

METRIAE LIB. I. DE

MAGNITVDINE.



Geometria est ars bene metiendi.

Finis geometriæ est bene metiri, ideoque suo fine definitur: Bene metiri igitur est cuiusque rei mensurabilis naturam atque affectionem considerare, resque mensurabiles comparare inter se, rationemque & proportionem atque similitudinem perspicere: id enim totum est bene metiri, siue congruentia & applicatione data mensura, siue multiplicatione terminorum, siue facti per multiplicationem partitione, siue quacunque alia ratione rei mensurabilis affectio consideretur. Atque hic finis ge-

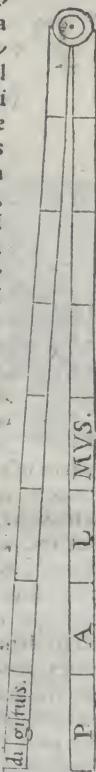
ometriæ usu atque opere geometrico multò splendidior apparebit, quam præceptis, cum animadvertes astronomos, geographos, geodetas, nautas, mechanicos, architectos, pictores, statuarios in descriptione & dimensione astrorum, regionum, fundorum, machinarum, æquorum, ædificiorum, tabularum, signorum nihil aliud quam geometriam uti: sicuti grammatica, rhetorica, logica plenius & abundantius percipiuntur ex usu poetarum, oratorum, philosophorum, quam è dictatis grammaticorum, rhetorum, logicorum: denique ut in grammaticis rebus bene loqui, in rhetoricis bene dicere, in logicis bene ratiocinari, in arithmeticis bene numerare, sic in geometricis bene metiri sit finis summus atque ultimus: quo referantur & pertineant omnia, quæ totis geometricis elementis instituantur. Mensura verò in quolibet mensurabili genere est quippiam minimum, ut Aristoteles annuit 4 cap. 2 de celo, & Proclus in Timæum repetit, & vulgo à geometris famosa mensura dicitur, ut in metiendis palmis, pedibus, passibus, unus palmus, unus pes, unus passus. Sed enim Protagoræ antiqui dictum est, in Aristotelis philosophia hominē esse τὸ πᾶν ἀναύτων χρημάτων μέτρον omnium rerum mensuram, quod etsi alio quodam sensu usurpatur à Protagora, attamen libenter audio hominē naturæ geometricum esse: & Vitruvius Heroque mechanicus docent mensuras rerum ex humanis membris acceptas esse, digito, palmo, pede, cubito. Digitus est 4 granorum hordeaceorum, ut granum hordei minima mensura sit, palmus 4 digitorum, pes quatuor palmorum, ut sequitur.

a Cubitus

Cubitus à radice ad extremum longissimum digitum est sesqui-
pes. Ex iis mensuris oritur itineris mensura passus, stadium millia-
riū. Passus geometricus est 5 pedum, stadium 12 5 passuum: & Græ-
corum est: milliarius mille passuum, & est Latinorum: ideoq; mil-
le & millia pro milliario & milliariis sumuntur. Franci & Hispani
Leucam 2000 passuum nominant. de cæteris generibus mensuræ
plura in scholis. Quare geometria hunc in modum definita sit ars
bene metiendi. Nomen autem re nominata levius est. Geometria
enim dicitur tanquam terræ tantum dimetiendæ ars quædam sit,
quod nomē videtur in Aegypto primum factum esse: ubi ad termi-
nos agrorum Nili inundationibus obrutos restituendum primum
geometria adhibita sit. Itaque authori Epinomidis geometriæ ἡ
νομα γεωμετρίας nomen ridiculū dicitur, quod nempe à terra mundani
globi centro factū sit, cum geometria sit ars metiendi non solum
terram, sed aquam, sed aerem, totumque mundum, in eoque cor-
pora, superficies, lineas, omniaque omnino mensurabilia: Neque
vero Plato cum dixit τὸν θεόν ἀειγεωμετρῆσαι, deum semper tanquam di-
ceres, terrimetiri, intellexit terras tantum metientem deum, sed ra-
tione, proportionem, similitudinem omnes mundi partes exornātem
& dimetientem: ut Plutarchus octavo Symposiacion secundo pro-
blemate interpretatur. Quare geometriæ nomen origine nimis
angustum est: usu tamen tandem est ampliātum latius, adeo ut cō-
fusa & arithmetica de numero, & metrica ipsam de magnitudi-
ne vulgo complectatur: & sic Quintilianus ait lib. 1. cap. 10. geome-
triam dividi in numeros atque formas, & Euclides, quamvis in to-
tis elementis verbum ipsum (geometria) nusquam legatur, attamē
re ipsa si elementa hoc nomine completū voluit, & si titulus elemē-
torū nominis huius fuit, arithmetica etiam & metrica geome-
triæ nomine cōplexus est. Et academia epigramma, ἀδελφοὶ γεωμετρικῆς
καὶ ἀριθμῆτος, non solum geometriæ, sed totam mathematicā ignoran-
tiam averfabatur. Itaque geometriæ nomen tandem latius ampli-
atum est. Platoni in Philebo & politico, & 7. de repub. μετρίτης signi-
ficantiore verbo & magis propriū dicitur hæc ipsa ars: sed quoniā nomen
magister est usus, geometriæ nomē teneatur modo sua vi & facultate propria de-
finitum. Singula autem elementa deinceps numero distinguuntur, & postea per
e litteram elementum significabitur.

2. Res ad bene metiendum proposita est magnitudo.

Subiectū geometriæ est magnitudo. Est enim singulis artibus certū & propriū
quoddā propositū genus ad interpretandū & suis præceptis informandū, eoque
præcipue inter se differunt, præcipueque sunt cōtinendæ. Idenim logica lex naturæ
autē imprimis præscribit. Sic grammaticæ sermo, rhetoricæ oratio, logicæ ra-
tio, arithmeticæ numerus, ita nunc geometriæ magnitudo declaranda, & om-
nibus



in omnibus generibus, differentiis, affectionibus explicanda proponitur.

3. *Magnitudo est quantitas continua.*

Hac definitio est ex Aristotelis categoriis: numerus est quantitas discreta, ut binarius, ternarius, quaternarius, constant ex unitatibus, duabus, tribus, quatuor: hæ partes sunt discretæ & separata: at lineæ, superficiei, corporis partes absque ulla secretione continentur, ut mox plenius intelligitur. Itaque magnitudo est, qua mensurabile quodlibet magnum dicitur: ut linea longum, superficiei latum, corpore solidum.

4. *Continuum est, cujus partes communi termino continentur.*

Hac item è categoriis Aristotelis definitio est, sensus reconditoris planeque geometrici: & præcipue dependet è communi termino: partes vero (quæ dicuntur) hic nihil in toto sunt, nisi potentia: ut vere Aristoteles admonet i. cap. 6. Phys. Neque tota magnitudo cogitari posset, nisi partibus suis compacta, quas tamen licet omnibus locis assumere contentas communi termino, qui Aristoteli est *νομός τις*, Euclidi *νόμος τῶν κοινῶν* communis sectio, ut in linea punctum, in superficie linea, in corpore superficies.

5. *Terminus est magnitudinis extremum.*

Terminus hic appellatur sive actu terminet, ut in magnitudinis principio & fine, sive potentia, ut cum est communis terminus continui, neque terminus est pars terminata magnitudinis: aliud enim est terminans, aliud terminatum. Terminus enim uno intervallo inferior est terminato: punctum lineæ terminus est, & minor est uno intervallo, quia est individuum: linea est terminus superficiei, & minor item intervallo, quia sola est longitudo: superficies est terminus corporis, & minor item intervallo, quia est longitudo tantum & latitudo. Et sic Aristoteli in categoriis terminus lineæ, superficiei, corporis accipitur punctum, linea, superficies. Terminata verò & finita omnis magnitudo est actu, geometra que (ait Aristoteles 6. cap. 3. Phys.) infinitam lineam non aliter postulat, quam quanta satis sit, & sic ait idem 10. cap. 1. de celo, *ἀπὸ γὰρ ὁρίων* postulantur discipuli lineæ caussa.

Itaque

Magnitudo infinite & creatur, & continetur, & secatur iisdem quibus terminatur.

Linea, superficies, corpus creantur motu puncti, lineæ, superficiei: item continentur & secantur puncto, linea, superficie: at linea puncto, superficies linea, corpus superficie terminatur: ut per singula genera percipitur. De sectione Proclus generatim etiam monuit ante i p 1. Quod omnia dividuntur iisdem, quibus terminantur: quod & continui definitione intelligitur. Nam si commune vinculum ad continendum & copulandum partes lineæ, superficiei, corporis est punctum, linea, superficies, necesse est sectionem communibus illis vinculis fieri, & dissolvi, quod continebat & copulabat. Infinita vero magnitudinis sectio plurimis in Euclide locis de quibus in scholis postulatur: unde & geometrica ἀφαί

a 2 givis &

geis & abstractio perspicue agnoscitur. Magnitudo enim in geometricis rebus, non physica, sed abstracta à physico corpore animo concipitur. *απορίστως* tamē communis omnium artium non geometriæ propria est: abstractiva enim perinde est (ut Aristoteles author est 3 cap. 13 lib. philosophiæ) astrologia, harmonica, Optica, Physica, Medicina, & omnino quælibet disciplina: quæ generalia tantum documenta interpretatur, è logica nempe lege *κατὰ τὴν αὐτὴν*. Et quidē calor & rubor, qui maximē sentiuntur, si propria doctrina doceantur, separati à cæteris qualitatibus & abstracti, imò à cæteris heterogeneis rebus cogitentur necesse est, solaque mente percipiantur, nec tamen talis in rerum natura calor, neque talis color separatus & abstractus ullus est. Attamen quamvis magnitudines, corpora, superficies, lineæ, puncta mente sic abstrahantur à qualitatibus physicis & sensilibus à lucido, umbroso, raro, denso, levi, gravi, calido, frigido, humido, sicco, revera tamen esse in iis ipsis physicis corporibus Aristoteles *ἀπορίστως* & solcite confirmat, ut in physicis 1. cap. lib. 2: 5 & 8 cap. 3, lib. de calor in methaphysicis præcipuè 3 cap. 13 lib. ubi nominatim ait rationes & demonstrationes esse de magnitudinibus sensilibus: non tamen quatenus sunt sensibiles, sed prout tales sunt. Et sicut Vitellio ad 3 p 2. verissime ait. Omnis linea, qua pervenit lux à corpore luminoso ad corpus oppositum, est linea naturalis sensilis, latitudinem quandam habens, in qua est linea mathematica per speciem imaginationis assumēda. Denique magnitudinis geometricæ intelligentia est mentis, magnitudo tamen ipsa, linea, superficies, corpus est revera in sensili & physico corpore. Hæc logica de mathematicis Aristotelea est. Quare magnitudines licet mēte separēt, revera tamē sunt illæ ipsæ magnitudines, quib. corpora physica corpora sunt, id est longa, lata, solida, atque omnino locum occupantia. Quare geometricæ & physicæ judicavit Aristot. cū docuit magnitudines revera physicas esse, sed abstractas à cæteris physicis qualitatibus à geometris mente considerari: & contrā geometricas magnitudines physicis qualitatibus permixtas à physicis sensu in corpore sensili tractari. Sic Aristoteles 2 cap. 2. phys. Lineam geometricam ab Optica distinguit. Geometria (inquit) considerat lineam physicam, at non quatenus physica est: Optica autem considerat lineam geometricam quidem, non autem quatenus geometrica est: sed quatenus physica. Sic igitur Aristoteles de abstractione mathematicum philosophatur. Neque verò in hac logica abstractione (quæ constituendæ doctrinæ causā instituitur) geometra mentitur, sed crasis symbolis, & notis, & exemplis punctorum, linearum, superficialium, corporum abutitur ad res notis illis significatas explicandū: quod Aristoteles monuit in prioribus 1 lib 39 cap. & in posterioribus 1 lib 8 cap. & in physicis 2 cap 2. lib. & in philosophia 3 cap 13 lib. & 2 c 14 l. Deniq; tota *απορίστως* geometrica est logica, quæ considerat genera generaliter, & sola mēte concipit, generum tamen essentiā & veritatē docet in singularibus consistere. & si quid omnino logicis legibus contrariū geometria profiteretur, id *ἀλογον* planeque absurdum judicarem. Quare cū magnitudo geometrica sit in infinitum dividua, *απορίστως* neque physicas magnitudines tollit, neque interea quidquam mentitur.

6. Punctum est signum in magnitudine individuum.

Euclides.

Euclides i. d. i. id ipsum comprehendit, cum ait, signum esse cuius nulla pars sit. Neque tamen absolute σημειον signum (ut Euclides) appellamus, sed punctum dicimus, quia Platoni & Aristoteli σημειον punctum est pro eodem hic proprium. Punctum vero ut definitur, physicum & sensu perceptibile nullum est, quia sensus tantum corpus sentit & si quid sensu minimum sit, punctum physici cum dicitur. Quare punctum quidem nulla est magnitudo, neque id ipsum est, quod creta pingitur, pictumque oculis cernitur, sed quod in magnitudine in dividuum concipitur & cogitatur. Ac quamvis sit magnitudinis expers, magnitudinis tamen omnis est principium & principium potentia: fluxu siquidem motuque puncti linea deinde exoritur, ex qua superficies, unde corpus. Itaque Aristot. 14. cap. 1. Top. punctum ait esse idem in linea, quod unitas est in numero: utrumque enim principium: unitatem enim principium numeri ajunt esse & punctum lineae. Proinde & Pythagoreis (ut est apud Proclum) punctum definitur unitas habens situm.

7. *Magnitudines symmetrae sunt, quas eadem mensura metitur, asymmetre contra* i. 2. d. 10.

Magnitudinum inter se est a numeris symmetria & ratio: a seipsis autem congruentia & adscriptio, sed mensura magnitudinis tantum est μέτρα, & arbitrio geometrae statuētis digitum, palmum, pedem, aut aliud quodlibet pro mensura. Ergo duae magnitudines, altera pedalis, altera bipedalis sunt symmetrae, quia magnitudo pedis unius utramque metitur, primam semel, secundam bis. At quaedam magnitudines mensuram communem non habent, ut diagonus quadrati & latus ad 116 p. 10. actu asymmetrae sunt, quae Aristoteli propositio est in ore perpetua. Diagonus tamen & latus potentia symmetrae sunt, per sua nempe quadrata, quia quadratum diagonii duplum est ad quadratum lateris.

8. *Rationales sunt quarum ratio est explicabilis numero. datae mensurae, irrationales contra.* e. 5. d. 10.

Data mensura Euclidi dicitur μέτρα id est dicta, definita, certa, quae nempe numero expressa sit, famosa nempe quae prius dicta est, velut signum propositum confessumque (ut ait author de lineis individuis) a qua mensura capitur (ut ait Theon ad 11 p. 10.) Atqui haec mensura rationalis est sibi ipsi, ut sunt omnes magnitudines inter se aequales: Ideoque vulgo rationalis dicitur, sed ratione obscuriore, cum reipsa terminus rationis unicus appareat: manifestiore autem ratione magnitudines rationales dicuntur, quae symmetrae sunt ad datam mensuram, sicut ait eodem author de lineis individuis, lineas rationales vel irrationales μέτρα ἀλλήλων inter se dici: quod nusquam tamen Euclides satis aperte proposuit. Sic Martinus in protheoria datorum ait μέτρα εἶναι, quod secundum aliquem numerum cognoscimus, & secundum aliquam positionem mensuram, ut secundum palmum verbi gratia vel digitum: sic apud Pachymerium definitur μέτρα per numerum nota. Sic in musicis Ptolemaeus definit rationale, cuius mensura accuratius nota sit. Irrationales igitur magnitudines contra intelligantur, ut latus la-

a 3 teris quae

teris quadrati 20 pedum ad datam bipedalem, qualium irrationalium magnitudinum genera tredecim libro decimo elementorum docentur: sic ad nostram hanc definitionem quamvis ad Euclide nequaquam satis expositam ad 6. 11. 16. 17 p. 13. segmenta recta proportionaliter secta sunt irrationalia ad totam rationalem: diameter in circulo rationalis est, irrationalis ad latus inscripti quinqueanguli: diagonus icosaedri & dodecaedri est irrationalis ad latus. Atque horum omnium ratio quidem est, ut ratio duarum quarumlibet quantitarum, sed cum sit inexplicabilis numero, satis fuerit generali notitia irrationales nosse: quae specie aut differentia ἀλογίας, ad finem geometriæ nihil attinet.

9. *Magnitudines congruae sunt, quarum partes applicatae partibus aequalem locum occupant.*

Symmetria igitur & ratio à numeris fuerunt, proxima magnitudinum affectiones geometricæ omnino sunt: in congruentia verò latus logice & situs intelligatur, qui sit corporis, superficiei, lineæ: imo vero etiam puncti. Et sic Euclides in Dat. ait dari situ, quæ semper eundem locum obtinent: & nominatim sic puncta, sic lineas, sic superficies dari profitetur. Igitur ἰσάμεως vel ἰσάμεως congruentia, ut Euclidi & Proclo dicitur, est duarum magnitudinum, quædo prima primis, media mediis, extrema extremis, partes denique partibus usque quaque respondent. Sic lineæ congruunt, quando puncta terminantia punctis, totæque longitudines totis longitudinibus eundem locum occupant. Sic superficies congruunt, quando lineæ terminantes lineis terminantibus, arcæ terminatæ arcis terminatis eundem locum occupant. Congruentia denique dicitur seu potentia seu ætu, ut separata lineæ rectæ æquales, quæ sic applicari possunt. Atque in lineis & superficiibus ἰσάμεως multis in geometria locis usurpatur. Imprimis hinc oritur axioma illud axiomatū Euclidi primum, Quæ eidem æqualia: applicatione enim & ἰσάμεως magnitudinibus id convenit: Sic 17 d. 1. congruunt in Proclo semicirculi per diametrum dissecti: sic triangula in Euclide ad 4 & 8 p. 1. ex quarum propositionū fundamēto innumerabilia deinceps concluduntur, ut eorum omnium, fundamentum sit ἰσάμεως. Triangula item in Pappo ad 5 p. 1. congruunt: Sic commune segmentum duabus rectis congruit ad 35 p. 1. sic secundo libro primæ propositiones planorū æqualitatē approbat: sic sectiones circulares ad 24 p. 3. congruunt: sic peripheriæ duæ & totidem circuli congruunt ad 30 p. 3. Sic ad 11 & 15 p. 4. congruunt, illic quinque, hic sex circuli: Sic (ut è lib. 10 patet) omnes magnitudines symmetras, quas quidem sine multiplicatione vel proportionē metiare, ἰσάμεως metitur: Sic ἰσάμεως adhibetur 1 p. 11. Sic ἰσάμεως postea erit mensura æqualium angulorum, quæ ipsa fere geometriæ anima est. Sic Archimedes 8 th. 1. Iosr. ἰσάμεως habet triangulorū, & 20 th. in sphaeroidibus ἰσάμεως sphaeroidum. Quin Archimedi 1 Iosr. rop. axioma quintum est: æqualibus & similibus figuris planis cōgruentib. inter se, & centra ponderum congruunt inter se. Itaque ex innumerabilibus congruentibus & lineis fit unæ linea, & superficiibus una superficies. Sic Vitellio cum illis Euclidis exemplis consentiens postulat libro primo, cum duæ superfi-

cies pla-

cies planæ se contingunt, unam ex eis fieri superficiem. Corpora verò si congruant, videntur tantum congruere per superficies, & sic 10 d. 11. corpora definiuntur aequalia, quæ comprehenduntur à superficiibus aequalibus multitudine & magnitudine. Et tamen hoc ipso, quod aequalia sunt, eundem & aequalem locum occupant. Et sic 1 d. 1. de gravi & levi, corpora definiuntur magnitudine aequalia, quæ locum replent aequalem. Hoc *ἰσχυρότερος* genere corpora liquidorum siccorumque omnium metimur, replendo nempe aequalem locum. Sic monetarii monetas ex equipondiiis laminis aequalis loci repletionem aequales iudicant. Attamen Archimedes antea citato loco Sphaeroidum *ἰσχυρότερος* facit, & à Comandino nostro Archimedis centrobarica imitato postulat: Solidis figuris similibus & aequalibus congruentibus centra quosque gravitatis inter se congruere: sed tamen *ἰσχυρότερος* ista, ut antea *ἀρσιτέριος*, mētis tantū est, & magnitudinū mente abstractarū, non sensilium & physicarum, quæ singulas partes sensili loco discretas habent, ut corpora duo physica simul esse nequeant. Physicum autem & sensile tactu nihil est tantum lineare, aut superficiarium tantum, sed corporeum est, quicquid est physicum.

Itaque

Magnitudines congruæ sunt æquales. 8. axi.

Potest minor recta maioris parti congruere, neque toti aequalis esse, sed tantum aequalis est quanta congruit, nec tamen axioma istud reciprocum est, neque congruentia atque æqualitas reciprocantur. Triangulū parallelogrammo æquari potest, neque tamen omnino congruere: & sic circulo quaritur æquale quadratum quamvis incongruum, quia *ἰσομετρίῳ* similia specie tantum congruere possunt, ut Proclus ait ad 4 p. 1. Itaque etiā parallelogramma non congrua possunt æuari, ut pater ad 35. 36 p. 1. Neque vero nobis *ἰσχυρότερος* axioma quisquam repudiet tanquam mechanicum, neque ideo geometricum. Nam Archimedes cum Euclide copulare libuit, & artis utilitatem cum veritate artis cōfingere. Neque isto principio quicquam in geometria luculentius est, primū omnino geometrica mensura, quæ granis, digitis, palmis, pedibus, cubitis, passibus, decempedis, & similibus efficitur, *ἰσχυρότερος* utique iudicio efficitur, & falsum est, mechanicum quod sit, geometricum non esse: postulata enim & problemata omnia (quod geometricorum & principiorum & propositionū genus alterum est) mechanica sunt: & cum theorematum differentiā vulgo habent, quod hæc contemplantur, illā fabricantur & machinantur. Symmetria & ratio totæ mechanicae sunt, dum eadem mensura diversas magnitudines metiuntur, & comparando numerant. Itaque *ἰσχυρότερος* tota geometrica est, ut tot locis jam patuit, nec regula & circini (quibus omnia geometrica problemata fabricas & machinas suas fabricantur & machinantur) vis alia atque alia facultas est, quam *ἰσχυρότερος* geometrica: ut qui *ἰσχυρότερος* à geometrica schola expellit, expellat ex eadem Euclidem & Archimedes, imo geometriam ipsam. Geometrice tamen agere non videatur qui mechanicam à geometricis principiis sequestravit, ut vulgo solent imperiti opifices, & plerisque in rebus etiam mathematici, ut

tici, ut cum sine geometriæ principiis, solis instrumentis inveniunt duas medi-
as continuè proportionales: Hic verò geometricum est principium ab Euclide
& reliquis geometris approbatum.

10. *Magnitudines adscriptæ sunt inter se, quando unius termini alterius
terminis terminantur: quæ intra est, dicitur inscripta: circumscripta,
quæ extra.*

Sequitur adscriptio, cujus species sunt inscriptio & circumscriptio. Hæc igitur
definitio generalis facta est è specialibus septem definitionibus de inscriptione
rectæ in peripheriam 7 d 4. de inscriptione & circumscriptione rectilineorum
inter se 2 d 4. de adscriptione rectilinei & circuli 3. 4. 5. 6. Adscriptione
rectilineorum inter se Euclides non utitur in elementis: utitur autem 13.
lib. adscriptione corporum ordinatorum in sphaeram: neque tamen usquam
definit. Definitio itaque generalis ab Euclide veritatem generalem accipiet, ut
intelligamus rectam in peripheria terminari punctis, quomodo Ptolemæus vo-
cat inscriptas circulo, & rectilineum terminari suis rectis, & circulum periphe-
ria, & corpus planum suis planis superficiebus, ut postea patebit. Homogenea
autem tantum inter se rectitermina & cum rotundo propriè adscribuntur. He-
terogenea tamen lib. 15. adscribuntur, quinque nempe ordinata corpora plana
inter se & recta inscribitur peripheriæ & triangulo. Adscriptionis verò rectilini
& circuli usus singularia mysteria tandem declarabit per rationes adscriptorū,
quæ clavis erit quædam præstantissimæ per subtenfas vel inscriptas circulo (ut
Ptolemæus loquitur, vel sinus, ut recentiores appellant) doctrinæ.

P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. I I.
de Linea.

Magnitudo est linea aut lineatum.

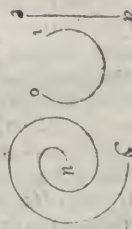
Communes affectiones magnitudinis expositæ sunt: sequitur di-
chotomia, quæ adhuc nobis occurrit.

2. *Linea est magnitudo tantum longa.*

Ut sunt æ. 10. 11. Talis autem magnitudo (ait Proclus ex A-
pollonio) concipitur dimensione viarum, differentiaque loci lu-
minosi à tenebricoso: Euclidi 2 d 1 definitur linea longitudo
latitudinis expers: & quidem longitudo propria est differentia
linæ, ut latitudo superficiæ, soliditas corporis.

3. *Linea terminus est punctum.*

Euclides 3 d 1. lineæ extrema ait esse puncta: antè verò de ter-
mino generaliter locuti sumus, & nunc lineæ proprium intelli-
gatur punctis terminari. Peripheria autem cum nec initium nec exitum habeat
videtur



videt punctis non terminari: at cum describitur, a puncto aliquo incipit, & in aliquod punctum definit. Quare punctum est terminus lineae, modo actu, ut in linea recta, modo potentia, ut in peripheria perfecta: Imo vero, ut antea patuit in continui definitione, punctis quaelibet lineae seu rectae, seu obliquae continetur. Linea vero lineatur motu puncti. Omnis enim magnitudo generaliter geometrico motu creatur, ut jam dictum est, & deinceps per species patebit, ut fiant uno motu totae figure, ut conversione circulus, sphaera, conus, cylindrus multiplicatione basis & altitudinis rectangula parallelitermina.

4. *Linea est recta vel obliqua.*

Partitio est 4 d 1. Vbi rectitudo attribuitur lineae, tanquam inde superficies & corpus rectitudinem assequantur: & certe sic Euclides videtur probare 17 p 13. quinquangulum dodecaedri esse planum, id est rectum, quia rectam capiat, quod & Proclus ad 7 d 1 indicat. Corpus planum id est rectum, definitur a superficie plana 9 & 10 d 11, & sic omnino rectitudo solidae figurae postea intelligitur per rectam a vertice in centrum basis perpendicularem. Itaque rectitudo est lineae, ideoque & obliquitas, unde superficies recta vel obliqua, & corpus rectum vel obliquum iudicatur.

5. *Linea recta est linea, quae intra suos terminos aequaliter interjacet: obliqua contra. 4 d 1.*

Aequaliter autem intra suos terminos interjacet linea, quando non hic humilior, illic altior, sed aequalis est spatio intra duos terminos comprehenso: ut hic *a e*. Sic qui rectum iter facit, vulgo dicitur tantum itineris conficere: quantum necesse est, qui facit obliquum plusquam, oporteat, ut Proclus ait. Itaque

Recta est brevissima intra eosdem terminos.

Consecrarium est Archimedeum ad 1 post 1 de sphaera. & sic Platoni postquam Platonem Euclidi in catoptrici linea recta est, cujus media extremis officium, ut in solis ellipsi si linea recta a sole per lunam ad oculum nostrum duceretur, media ipsa luna nostris luminibus officeret, solisque aspectum nobis adimeret, quod ex opticis sumptum est, in quibus docetur visum rectis radiis fieri. Itaque quod Euclides definit rectum in linea per aequalem inter puncta tanquam dices interjacentiam, id est per aequale intervallum, illud ipsum est Archimedi brevissimum intra eosdem terminos, quodque Platoni & Euclidi medium extremis officit.

6. *Linea obliqua tangitur a recta vel obliqua, quando ambae ita concurrunt, ut continuata non interfecentur.*

b Tacitus

Tactus proprius est obliqua linea ad lineam rectam vel obliquam, ut constat e 2 & 3 d 3. Recta circum tangere dicitur, quae tangens circum & producta non secat circum, 2 d 3: ut hic *ae* recta tangit peripheriam *iou*, & *ae* tangit helicen. Circuli sese tangere dicuntur, qui tangentes sese non secant, 3 d 3. Ut hic peripheria *aei* tangit peripheriam *ouy*.

Haec speciales Euclidis definitiones circum pro peripheria nominant, & tactum a sectione, & sectionis potentia distinguunt. Alioqui tactus verbum etiam in elementis commune est pro quolibet concursu: sic 8 d 1 angulus planus definitur inclinatio linearum sese tangentium in plano.

Itaque

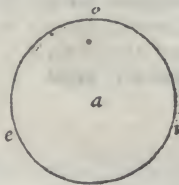
Tactus fit unico puncto. e 13 p 3

Consecrarium proutus est definitione intelligitur, alioqui sectio esset non tactus. Sic Aristoteles in mechanicis ait rotundum esse mobilissimum & velocissimum, quia minime tangatur a subiecto plano.

7. *Linea obliqua est peripheria aut helix.*

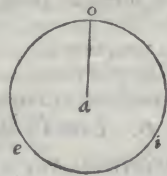
8. *Peripheria quae distat aequaliter a medio comprehensi spatii.*

Ut eo distat aequaliter ab a medio comprehensi spatii.



Peripheria fit conversione lineae altero termino quiescente, altero li-
neante.

Ut in eo maneat punctum *a*, & convertatur linea *ao*, ita ut punctum *o* imprimat vestigium, fiet peripheria *eo*. Ex hac fabrica Euclidi peripheria definitur 15 d 1. & sic sphaera, conus, cylindrus eidem definiuntur. Linea vero quae convertitur, recta vel obliqua esse potest in plano: obliqua duntaxat est in sphaerico: in conico autem & cylindraco recta potest esse, ut latus est coni & cylindri. Itaque in conversione lineae peripheriam procreantis spectatur tantum intervallum: imo puncta duo, alterum in centro, alterum in

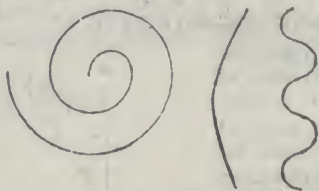


summo,

summo, quæque ideo Aristoteles 10 cap 8. Phys. nominat rotundi principia,

9. *Helix est quæ distat inæqualiter à medio utcumque comprehensi spatii.*

Hæc autem tortuosa linea in *moedhs* Proclo dicitur, at helix etiã dici potest, cujus variaz species sunt, ut Arithmetica quæ est Archimedis helix, ut cõchois, ut cittois: quæ in geometria suos postea authores habuerunt Archimedes, Nicomedem, Geminum. Linea autem *τετραγωνισσασα* (cujus ope circulus quadratur) & admirabilis, celebrantur: *τετραγωνισσασα* Dinostrato, Nicomedi, Hippia. Pappus initio tertii & Proclus 9 p 1 attribunt. Pappus admirabilem attribuit Menelao: Conicæ verò ellipsis, hyperbole, parabole, quales hic sunt, attribuantur



Menechmo.

Apollonius

eas libris 8

complexus

est, quas omnes

mistas

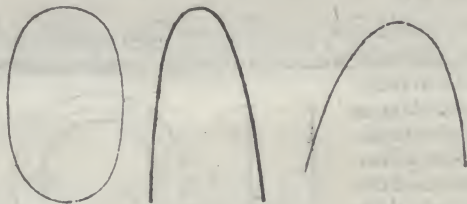
lineas, ut ex

plicatu enu-

meratucq; dif-

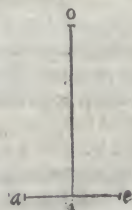
ficiles Eucli-

des prætermisit, ait Proclus ad 9 p 1.



10. *Lineæ inter se rectæ sunt, quarum altera in alteram incidens æqualiter interjacet: obliquæ contrâ. é 10 d 1.*

Adhuc affectiones unius & solius lineæ fuerunt rectitudo & obliquitas: duarum inter se affectiones sunt perpendicularum & parallelismus, qualescunq; sint rectæ vel obliquæ: perpendicularum primo definitur generaliter. Sic duæ rectæ in plano perpendiculares sunt. Vt *ae* & *io*. Sic duæ peripheriæ in sphærico erunt perpendiculares, quando altera in alteram incidens æqualiter interjacebit, nec quoquam inclinabit. Sic recta peripheriæ perpendicularis fuerit, si incidens neutro acclinat, sed æqualiter interjaceat. Denique ut de primo & composito numero, primisq; inter se & compositis inter se numeris dictum est, duos primos esse primos inter se, item duos primum & compositum, denique cõpositos ipsos posse inter se primos esse: sic duæ rectæ possunt esse rectæ inter se, sic item recta & obliqua, denique obliquæ duæ. Atque omnino lineæ inter se rectæ



b 2

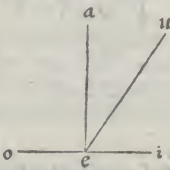
& perpen-

& perpendiculares pro eodem dicuntur, & à perpendiculo linearum perpendicularum superficierum sumitur, ut patebit postea. De corporum perpendicularo nullum est in elementis verbum, attamen etiam corpus rectum corpori iudicatur per lineam perpendicularem.

Itaque

Si recta est perpendicularis rectae, est ab eodem termino & eadem partesingularis. è 13 p II.

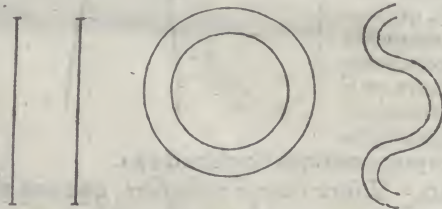
Nā si plures essent, altera acclina-
ret, neque æ-
qualiter in-
terjaceret: ut
hic vides in
rectis *ae, io,*



& *u.* Proclus ad 17 p I.

II. *Lineae parallelae sunt, quae ubique distant aequaliter.* è 35 d I.

Sequitur parallelismus communis omnium linearum rectarum & obliquarum: ut hic vides in rectis & obliquis. Parallelismus autem è perpendiculo derivatur, & ei valde affinis est. Itaque Posidonius communi perpendiculo definebat parallelismum: quævis nostræ definitionis est. Et sic Euclides circulo inscriptarum à centro æquidistantiam metitur æqualibus perpendicularis, 4 d 3. Sic etiā ad rem multo propius Euclides idem metitur parallelorum altitudinem & distantiam 4 d & 1 p 6: Sic enim dicuntur 1 p 6 æquealta, quæ 35.36.37.38.39.40.41 p 1 dicuntur esse intra easdem parallelas. Sic 6.8.14 p 11 dijudicat parallelismum communi perpendiculo, ubi & parallelismus superficierum erit è parallelismo linearum. Corporum parallelismus in elementis nusquam appellatur, sicuti neque perpendicularum appellatum est. Est tamen & quidem è parallelismo linearum, magnique usus in Optica, Mechanica, pictura, architectura per lineas nempe parallelas. Sic Vitellio 74 p 1 sphaeras parallelas appellat, sed sphaeras concentricas, & corpora potius spherica quàm sphaeras: Nam cava sunt intus illa corpora, non penitus solida: Denique sic appellat sphaeras parallelas, uti peripherias concentricas parallelas diceret. Parallelismus igitur, ut è definitione patet, est linearum, indeq; ad superficies & corpora, ut rectitudo & obliquitas & perpendicularum transfer-

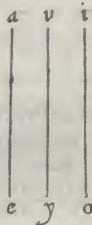


transfertur: secus si quid dicitur, sensus tamen huc respicit, ut cum Vitellio ad definitiones 61 & ad 49 p 6 dicit lineam rectam esse parallelam sphaerae, intelligit quando est parallelia rectae sphaeram tangenti, & sic rectarum inter se etiam tum parallelismus est: non est vero praeiuncta etymologia παραλληλῶν. Nam παράλληλα contra se, & e regione posita dicuntur, saepeque authores sine compositione sic usurpant. Sic Aristoteles appellat γραμμὴν παρά τινος γραμμῆν pro lineis parallelis lineam contra lineam. Quomodo & Euclides loquitur ad 10 & 15 p 11, & multo sapius in opticis: sic in Datis, & sic post Euclidem Archimedes & Apollonius loquuntur.

Itaque

Lineae eidem parallelae sunt inter se parallelae.

Hoc elementum propositum speciatim de lineis rectis, & demonstratur 30 p 1. At per additionem aequalium distantiarum aequalis distantia nota est, ut hic.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. III.
de Angulo.

Lineatum est magnitudo plusquam longa.

Nova doctrina forma coegit novis uti plerumque vocabulis, praesertim in partiendo, ut ad logicam perfectioris partitionis legem dichotomia teneretur. Itaque magnitudo bifecatur in lineam & lineatum, & lineatum genus erit superficiei deinceps & corporis: lineatum quippe, in quo lineae sint. Possunt enim duci lineae in superficie, quod proprium est linearum solum, possunt in corpore, ut diameter in prisma, axis in sphaera, omninoque sublimes lineae. Ideoque Proclus ad 4 d 1, item 12 & 35 p 1 lineas facit alias planas, alias solidas. Sic conicae lineae, ellipses, hyperbole, parabole, solidae vocantur, quia oriuntur e corporis sectione.

2. *Lineati est angulus & figura.*

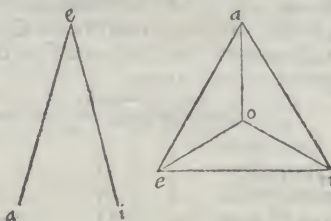
Communes affectiones magnitudinis fuerunt terminari, secari, commensurari, congruere, adscribi: deinde lineae dirigi, obliquari, tangi, converti, torqueri, quae omnia etiam in lineato sunt per lineam. Lineati est angulari & figurari. Angulus porro & figura in tota ratione geometricarum rerum utramque

b 3 fere pa

fere paginam faciunt. Itaque diligenter utrumque considerandum est.

3. *Angulus est lineatum in communi sectione terminorum.*

Sic angulus superficialis est superficies in communi sectione duarum linearum; sic angulus solidus est corpus in communi sectione trium minimum superficialium. Sic angulus $a e i$ superficialis est. sic angulus comprehensus à tribus superficiebus $a o i, i o e, a o e$ solidus est, neque superficies duarum dimensionum una recta linea, neque corpus trium dimensionum duabus superficiebus saltē planis terminatur. Hæc generalis est definitio anguli, qui totis mathematicis tractatur, ubi angulus bisecatur, ubi æqualis major, minor instituitur. Hæc (inquam) generalis est definitio anguli, quæ quantum negotii veteribus mathematicis exhibuerit, ostendit ipsorum inter ipsos cōtroverſia apud Proclum § d i. Carpus angulum definiebat intervallum sub inclinatione terminorum ad unum. Apollonius & Plutarchus Carpum sequebantur, illud (ad unum) interpretati primum. Proclus præceptorem Syriacum (opinor) sequutus licet verbo longissime ab iis dissentire videatur, tamen re ipsa huc accedit, dum angulum superficialium definit superficiem in uno signo ab inclinatis lineis collectam, solidum ab inclinatis superficiebus. His igitur authoribus angulus definiatur lineatum in communi sectione terminorum. Carpi vero ad unum, Apollonii & Plutarchi primum intervallum erat adversus elenchum, ne totum lineatum ubique angulus esse diceretur, sed tantum in ipso communis sectionis puncto, ubi terminatur ab inclinatis terminis. Euclides § d i & i i d i i definit angulum inclinatione linearum, in quo reprehenditur à Proclo. Causa dicitur in scholis.



4. *Crura anguli sunt termini comprehendentes angulum.*

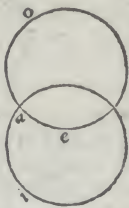
Crura *enim* dicimus basi anguli insistentia, quæ in triangulo æquicruro tantum nominavit Euclides, latera alias appellat. At proprietas ut rei, ita sermonis placet. Sic in exemplis positus duæ lineæ sunt $e a, e i$ crura superficialii anguli: sic superficies tres $a e i, i o e, a o e$ sunt crura anguli solidi. Itaque crura angulantia sunt lineæ, aut superficies: angulata autē lineata sunt superficies aut corpora.

5. *Anguli homogenei sunt anguli cruribus & crurum concursu genere iidem.*

Itaque homogenia ista duplex est, prima crurum, secunda concursus: sic anguli recti rectilinei sunt homogenei inter se. Recti autem rectilinei rectis obliqui lineis sunt heterogenei, sic non omnes obtusi omnibus obtusis, nec omnes acutis omnibus acutis homogenei sunt: nisi adsit homogenia & crurum & concursus. Lunularis systroidi & pelecoidi crurib. est homogeneus: quilibet enim comprehenditur à peripheriis: lunularis altera concava, altera convexa, uti *a e* systroides

fyftroides ab utraque convexa, ut *ao*: pelecoides ab utraque concava, ut *dk*.

Lunularis tamen concur-
su est heterogeneus fyftro-
idi & pelecoidi. Itaque
& absolute heterogene-
us. Hæc igitur distinctio
præcedat ad distinctionē
sequentium. De homo-
geneis igitur angulis for-
lis sequentia sunt, ne sæ-
pius idem verbum repe-
tatur.

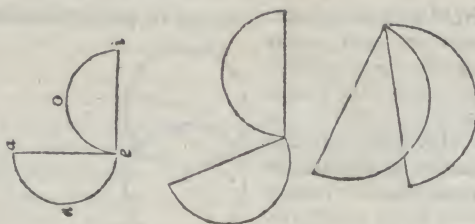


6. Anguli cruribus congrui sunt aequales.

Hoc axioma prætermisum in elemētis geometricis magnas obscuritates pe-
perit: bene autem & ex ordine constitutum per magnam lucem afferet. Est igitur
ē prima illa *ἐπαγωγὴ* luce. Nam si bis bina crura congruant, non quatuor, sed
duo crura erunt: nec tam duo anguli æquales quam angulus unus. sed enim
axioma istud æqualium angulorum jam olim in scholis mathematicis agitatū
est, ut patet ē Proclo ad 4 p 1. Illic enim sic loquitur Proclus: Angulus rectiline-
us rectilineo æquatur, quando crure altero alteri superposito reliquum reliquo
congruit, cum reliquum crus cadit extra, angulus est major extra cadentis cru-
ris: cum vero cadit intra, minor: illic enim comprehendit, hic comprehendit-
tur. Angulorum igitur rectilineorum æqualitas sumetur secundum congruen-
tiam crurum in rectilineis: item in cæteris omnibus, qui sunt *ὁμοειδῆς* ejusdem
speciei. Hic igitur Proclus affirmat æquales angulos, quorum crura applicata
congruunt, quod nostrum axioma est, & *ὁμοειδῆσιν* notat, quam diximus *ὁμογέ-
νῃ*. Veritas autem axiomatis hujus est ē congruentiæ axioma. Quia duo li-
neata hic unum est *ἐπαγωγή*. Itaque axioma istud illinc erit immensæ quidē lu-
cis & utilitatis. Nam materies 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26 p 1 ex
istā generali luce lucem accipiet, & si de pyramide in solidis similia docerentur,
indidem lucem etiam caperent. Ergo quod generale & commune est tam mul-
tis elementis, præponitur, quod speciale est, hinc postea derivatur facilitate
prorsus admirabili, si quis myriades syllogismorum Euclideanorum & directē &
per impossibile concludentium cum brevibus consectariis nostris comparet.
Congruentia tamen & æqualitas angulorum non recipiuntur. Nam recti-
lineo recto lunularis æuari potest, ut Pappus apud Proclum in axioma de
angulis rectis docet: ut hic vides.

Nam an-

Nam anguli semicircu-
lorum æqualium $i e o$
& $a e u$ æquantur, quod
ip̄æp̄uor ostendet: cō-
munis est angulus $a e o$
recto $a e i$, & lunulari
 $a u e o$: addatur igitur
utriq; cōmunis $a e o$ æ-
quabitur rectus $a e i$, lu-
nulari $a u e o$: Potest ve-
ro & idem lunularis ex-



quari obruso & acuto, ut idem argumentum demonstrabit.

Itaque

1. Si angulus angulo æquicrurus æquatur basi, est æqualis, & si est æ-
qualis, æquatur basi. ex 8 & 4 p 1.

Nam cruribus erunt congrui, & basibus item congrui.

Et

2. Si æqualis basi est æquicrurus, æquatur.

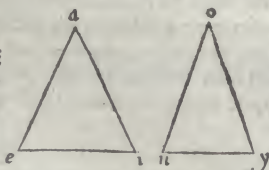
Nam congruen-
tia eadem est: non
tamen si æquales
æquatur basi, sunt
æquicruri, ut in an-
gulis in eadem se-
ctiōe apparebit, ut
hic: & sic ē duabus
æqualitatibus pri-
ma reciprocatur, se-
cunda non item.



Et

3. Si angulus angulo æquicrurus est major basi, est major, & si ma-
jor, est major basi, ē 25 & 24 p 1.

Vt
hic $a e i$
major
basi q̄
o u y.

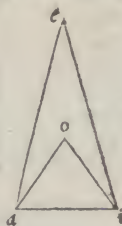


Et

4. Si æqualis basi est minor interioribus cruribus, est major.

Vt hic interior $a o i$ est major exteriori $a e i$: interioribus autem additur ne-
cessario:

cessario: secus apparebit error in illa sectione. Ex eodem illo congruentia axio-
mate, hæc rursus omnia deducuntur, quod Proclus ad 8 p 1 lu-
culenter exposuit. Videtur autem (ait) æqualitas crurum & ba-
sium facere æqualitatem verticalium angulorum. Neque enim
si bases sunt inæquales, æqualitas crurum eosdem angulos re-
linquit: At si minor sit basis, angulus decrescit: si major, auge-
tur: neque si bases sunt æquales, crura inæqualia: angulus ma-
net: at dum imminuuntur, augetur: dum augentur, imminu-
itur: Cōtrarium enim accidit angulis & angulorum cruribus.
Nam si crura in eadem basi deorsum depressa cogites, ipsa qui-
dem minuis, eorum vero angulum auges, maioremque ipsorū
inter ipsa distantiam facis: Sin cogites sursum crecta atque aucta, angulum mi-
nuis. Quanto enim amplius coincidunt, tanto magis à basi vertex remouetur.
Quare certum sit affirmare, quod basis eadem & crura æqualia definiunt æqua-
litatem angulorum. Hic Procli locus facit æquales angulos æqualitate crurum
basiumq; ut anguli sint æquales, qui crurum æqualium bases habent æquales.
Nam homogenea æqualitas crurum est ipsa congruentia, sed à Proclo homo-
genia prætermittitur, sine qua tamen consecrarium falsum sit. Quare axioma
congruentia præponimus, & ex eo consecrarium hoc, sed emendatum deduci-
mus. Veruntamen ad ejus consecrarii constantiam commentarii veterum è Pro-
clo non sunt potius excutiendi, quam Euclides ipse ad 23 p 1 & 26 p 11 atten-
dendus: cum ex hac æqualium angulorum materia nō consecrarium postulat,
sed demonstrabilē propositionē duplicem de rectiterminis angulis facit. Inter-
roga nempe Euclidē ad 23 p 1, quomodo dato angulo rectilīneo æqualē factu-
rus sis, respondebit, si crurum æqualium bases æquaveris: idemque ad 26 p 11
de solido angulo plano Euclides profiteretur. Itaque Euclidē magna gratia pro
tāto beneficio à geometris debeat: unde licebit magnā postea variarū propo-
sitionum familiam derivare, neque vereamur ne objiciatur hoc axioma ab Eu-
clide demonstrari. Nullo enim antecedente elemento utitur Euclidis demon-
stratio, quod postulandum non fuerit, ut illic intelligetur, & tamen materies
ex axioma protinus postulanda fuerat. Itaque & nos postulavimus, & fabri-
cam tamen interea æquandī anguli non minus geometricam retinemus, sic de
problemate maledubitato *ἀντιφα* per se indubitatum facimus. Oenopides autē
problematis de æquando angulo primus auctor à Proclo efficitur, de cujus in-
ventis in proœmio dictum est.



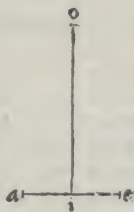
5. Si dati anguli cruribus ad datum punctum crura homogenea æquē-
tur æqua basi, æquabunt angulum dato. è 23 p 1. & 26 p 11.

7. Angulus est rectus vel obliquus.

8. Rectus cujus crura sunt inter se recta, obliquus contra.

c Rectus

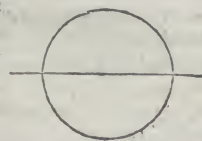
Re-
ctus
an-
gu-
lus
est a
o & o
i.e.



Itaque

Anguli recticruri recti sunt aequales.

Axiomata de aequalitate angulorum tria jam fuerunt, unum generale, duo consecretaria: Hic de aequalitate rectorum angulorum speciale prae-
rea unum est. Angulos homogeneos recticruros, id est quorum crura sunt
recta, ut linea recta, ut superficies plana (hoc enim verbum nobis conce-
datur) rectos aequales esse: sic anguli rectilinei recti propositi sunt aequales:
sic anguli solidi plani recti, ut in cubo, sunt aequales. Axioma igitur commune
potest esse etiam de solidis angulis modo recticruris: quia non omnes semicir-
culares recti omnibus semicircularibus rectis sunt aequales: ut hic cum diameter
sit continua perpendicularis est, & facit bis binos intus
forisque externos aequales inter se, & interiores aequales
inter se, sed externos interioribus inaequales, & majoris
semicirculi angulus major est angulo minoris. Neque o-
mnino affectio reciproca est, ut omnes anguli aequales
sint recti: possunt enim obliqui inter se aequari, & potest
obliquus aequari recto, ut lunularis rectilineo, ut patuit.
Obliqui anguli definitio est crurum obliquitate intelligi-
tur: unde etiam patet angulum obliquum inaequale esse
recto homogeneo: neque ulla lege obliquos angulos aequari: quia infinite ob-
liquitas augeri minuique potest.



9. *Angulus obliquus est obtusus aut acutus.*

Obliquitatis alia differentia fuit in linea, peripheria nempe & helicis; hic alia
dichotomia est obtusum & acutum, quae differentia propria est angulis, unde
alio transfertur: ut ingenium obtusum, acutum, & similia.

10. *Obtusus est obliquus major recto. II d. I.*

Ut hinc ei. Intelligi-
tur in definitione ge-
nus speciei utriusque:
Nam rectus rectiline-
us est major recto
sphaerico, neque ta-



men obtusus est: haec autem major inaequalitas infinite potest augeri.

II. *Acutus*

II. *Acutus est obliquus minor recto, 12 d1.*

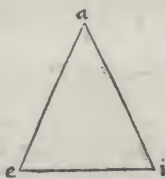
Vt aei. Hic ge-
nus idem intelli-
gatur, quia non
omnis angulus
minor quolibet
recto acutus est:
nam rectus semi-
circularis & sphe-
ricus minor est
recto rectilineo,
neque tamen est acutus.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. IIII.
de figura.

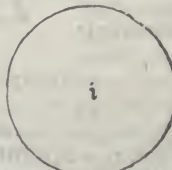
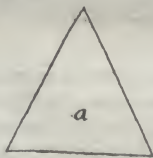
Figura est lineatum undique terminatum.

Sic triangulum aei est figura, quia est planum tribus lateribus undique terminatum. Sic circulus est figura, quia est planum una peripheria undique terminatum. Sic 14 d 1 figuram cum definit Euclides, quod ab aliquo, aut ab aliquibus terminis comprehenditur, lineam figuram non facit, cum linea duobus tantum punctis ad extrema duo terminetur, neque longitudo sola express latitudinis potest in latum terminari. Figura itaque lineatum tantum est, sed sequentia figurae generatim in superficie & corpore rem totam declarabunt.



2. *Centrum est punctum in figura medium.*

In figura parte aliqua spectantur centrum, perimeter, radius, diameter, altitudo. Centrum igitur est punctum in medio figurae: sic in triangulo, in quadrato, in circulo centrum est a, e, i. Centrum videtur Euclides 16 d 1 & 16 d 11 rotunda figurae proprie attribueret, quomodo & Apollo oraculi sui carmine definivit,



Κέντρον δὲ ὃ πᾶσι μέγεθος ἴσων ἵσται.

Centrum à quo omnes usque ad oram æquales sunt.

Verum ne hic Apollo quidem, quamvis deliaco duplicandì cubi problema te mathematicus haberi voluerit, tamen Aristoteli probaretur generale specia liter definiendo. Nam 3 & 4 p 15 centra quadratorum appellantur, item 4 p 15 centra triangulorum, quomodo cujuscunque figuræ centra dicuntur: & cētrum gravitatis dicitur in omni magnitudine plana, ex qua suspensa est paral lela horizonti: ut ex Archimede & Eutocio perspicitur, vel (ut Pappus ait 8 the or. 8 lib) est punctum à quo suspensum pondus quiescit dum fertur. Itaque si la mina aliqua partibus omnibus aequè gravis esset, centrum idem esset magnitu dinis & gravitatis.

3. Perimeter est comprehensio figuræ.

Hæc definitio est nominis græci. Ergo perimeter trianguli est una è tribus li neis composita linea: ut à Proclo dicitur 4 p 1. sic trianguli a perimeter est eio.

Sic perimeter:

circuli est peri pheria, ut in ei

o. Sic perime

ter cubi est su

perfacies è sex

planis superfi

ciabus compo

sita, & perime

ter sphaeræ est superficies sphaerica integra, ut postea patebit.

4. Radius est recta à centro ad perimetrum.

Vt in sube

jectis figuris

a e, a i, a o, a n

rip radius est

verbum Pla

tonis in Ti

mæo rotun

dum defini

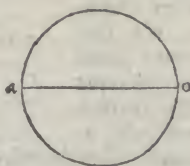
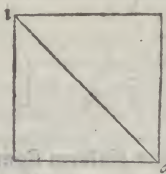
entis, cujus

omnis extremitas paribus à medio radii attingitur: at antea centrum pro cu jus libet figuræ medio sumptum est. Sic modo radius intelligatur pro qualibet distantia à centro ad perimetrum, sive sint æquales, sive inæquales: quomodo in opticis radii dicuntur à visibili tanquam ab aliquo centro, quoquò versus re ctis lineis agi. In geometricis elementis radii nomen nusquam est, sed periphra sis perpetua. Quæ ex centro, cum de circulo agitur.

5. Diame-

5. *Diameter est recta inscripta figura per centrum.*

Ut in sub-
iectis figu-
ris a, e, i, o.
Diameter
est recta li-
nea in circu-
lo ad 17 d 1:
in paralle-
logrammo



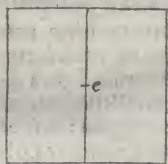
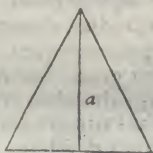
ad 34 p 11 in sphaera ad 17 d 11: in prisma ad 39 p 11. Diameter trianguli etiam
similiter est, & omnino cuiuscunque figurae, quia ut antea dictum est, figurae
cuiuscunque centrum est, tamen & centri & diametri non proinde facili sit in-
ventio. Diagonus autem dicitur, quando terminatur oppositis angulis, ut
28 p 11, ut in demonstratione 39 p 11. sed in planis & rectilineis proprie. Nam
potius in solidis axis dicitur, ut patebit postea: ut vero ex infinitis per totam
figuram punctis unicum centrum est, sic ex inaequalibus lineis infinitis per to-
tam figuram ea sola diameter est, quae per centrum transit. Itaque

1. *Diametri in eadem figura sunt infinita.*

Diameter quamvis ex infinitis inaequalibus ea sola sit, quae per centrum, at-
tamen per centrum varia esse potest: in circulo res apertissima est, ut in astrola-
bio index volvi potest per omnia puncta peripheriae: sic in sphaera & rotundis
res facilius est, ubi diametri sunt aequales, in reliquis tamen res eadem: quia
diameter est recta per centrum inscripta, utrum ad angulos an ad latera termi-
netur, nihil interest. Itaque diametros infinitas in eadem figura esse, est e dia-
metri definitione: Et

2. *Centrum figurae est in diametro.*

Ut hic
vides
a, e, i.
Hoc
est e
dia-
metri
defi-
nitio.

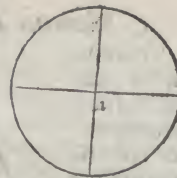
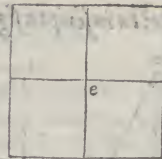
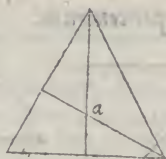


ne. Nam quia diameter inscribitur figurae per centrū, ideo centrum figurae in di-
ametro esse necesse est: id praecipue assumit Archimedes 9. 10. 11. 13 th. 1. Isorro. Et

3. *In concursu diametrorum.*

Hoc item est ex eadem definitione diametri, ut hic. Nam cum diameter quae-
c 3 libet sit.

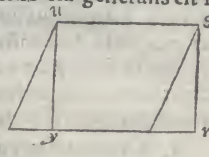
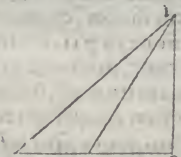
libet sit per
centrum, ne-
cesse est cen-
trum comu-
ne esse dia-
metris omni-
bus, ideoque
esse in earum
concurfu, a-



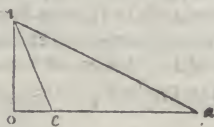
lioi qui essent diversa centra ejusdem figuræ. Id vero nominatim Archimedes proponit in Istoropis 8 & 12 th. 1 Istor. de parallelogrammis & triangulis præcipiens.

6. *Altitudo est perpendicularis à vertice figuræ ad basim.*

Ut in subjectis figuris sunt ae, io, uy vel sr . Hæc definitio ita generalis est in Euclide 4 d. 6, communis in plano rectilineis & circulis, in solido pyramidibus, prismatis, sphaeris, conis, cylindris, communis denique omni figuræ: nec vero interest utrum basis eadem sit, an longius continuata, ut in triangulo, obtusangulo,



cū basis est ad obtusum. Ut hic in triangulo aei est ao .



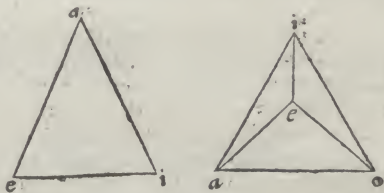
7. *Figura ordinata est figura æquitermina & æquiangula.*

In figuræ parte sunt (ut patuit) centrum, perimeter, radius, diameter, altitudo. In tota autem figuræ affectio est varia & numero differentiaque terminorū: à numero differentiaque terminorum figura dici possit generaliter rectitermina, æquitermina, æquicrura, parallelitermina, oblonga, rhombus, rhomboïdes, trapezia, æquiangula, rectangula: in superficiebus autem trilatera, quadrilatera, multilatera, æquilatera, rectilinea, obliquilinea, mistilinea: in solidis tetraedra, pentaedra, polyedra, plana, sphaerica, conica, cylindracea: à numero differentiaque angulorum in superficiebus triangula, quadrangula, multangula: in solidis similis differentia nominari non solet, quamvis tamen insit. Hæc vero differentia aut suis nominibus intelliguntur, aut speciatim per suas species intelligetur. Tres igitur affectiones generales hic videntur definiendæ: figuræ ordinatio, primatus, & ratio. figuræ vero ordinatæ definitio nomina-
tim non

tim non est in elementis Euclidis, attamen ex 25.26.27.28. 29 d 11 sumi potest, ubi adhibentur ad ordinatum corporum definitionem plana, æqualia, æquilatera & æquiangula. Sic Theon *τεταγμένων σχήμα* definit primo magnæ constructionis: (cum de planis rectilineis loquitur) æquilaterum æquiangulum. Pappus autem & græci alii vocant *τεταγμένον διττότερον* ordinatum, bene ordinatum: Campanus pro eodem regulare dixit ad 17 p 13. In planis igitur triangulum æquilaterum est ordinatum, & reliqua triangula sunt inordinata: in quadrangulis quadratum est ordinatum, reliqua inordinata: multangulum generis cuiusque potest esse ordinatum. In obliquilineis circulus est ordinatus, quia æqui terminus, cum terminus pro terminis innumerabilibus unicus & singularis sibi ipsi præcipue sit æqualis, quia æquiangulus, cum (licet reipsa nullus in se angulus) par tamen & æqualis utique sit inclinatio & velut angulus peripheriæ sibi ipsi semper æqualis: unde Platoni ac Plutarcho circulus dicitur polygonia, & Aristoteli *ἐκκυρία* totus angulus. In mistilineis nihil est ordinatum: in solidis, & pyramidibus tetraedrum est ordinatum, è prismatis cubus, è polyedris tria tantum octaedrum, dodecaedrum, icosaedrum: In obliquilineis sphaera est ordinata eodem argumento quo circulus.

8. *Figura prima est figura in alias simpliciores figuras individua.*

Sic in planis prima est triangulum, quia in simplicio rem figuram dividi non potest, quamvis multis modis dissectari possit: sic in solidis pyramis prima figura est, quia in simplicio rem corporis figuram dividi non potest: licet in alias innumerabiles possit dividi: à triangulo autem omnia plana oriuntur, ut à pyramide corpora, quales figurae sunt *aei, aeio*.



9. *Figura rationalis est quæ comprehenditur à basi & altitudine rationalibus inter se.*

Sic Euclides 1 d 2 dicit rectangulum comprehendere à duabus rectis inter se, quippe multiplicatis. Geometrica enim comprehensio est interdum velut in numeris multiplicatio. Itaque si dederis basin & altitudinem rationales, ut earum ratio sit explicabilis numero data mensura, tum numeris laterum multiplicatis explicabitur magnitudo figurae: Generis huius definitio materiam demonstrabilis propositionis Euclidi præbuit, 20 p 10 de rectangulo rationali: At materiam principii præbere debuit, ut præbuit 16.17 d 7 in definiendo plano & solido numero. Tales enim numeri significant figuras rationales explicabiles numero, & numeri multiplicati inter se facientes numeros illos planos, solidosque latera figurati numeri discuntur ab Euclide in illis definitionibus. Figura itaque rationalis sit duobus rationalibus lateribus inter se multiplicatis: & per synec-

dochen

dochen ita figura unica dicitur rationalis, per latera nempe rationalia, tales figurae tandem erunt in planis parallelogrammum rectangulum, in solidis rectis prisma & cylindrus, unde reliquarum omnium figurarum ratio & mensura capiatur.

Numerus figurae rationalis figuratus dicatur, & numeri unde fit, latera figurati.

Et specialibus nominibus plani, quadrati, solidi, cubi quibus Euclides utitur, generale figurati nomen hic factum est, & analogia eadem numeros factores figurati, lateratos dici conveniebat: latera tamen dicta sunt Euclidi, neque tropum mutari necesse est. Geometria vero sui & generis & juris magnam quidem partem est, neque aliter quam geometricè tractabilis: attamen parte quaedam numeris associatur, & iis explicatur, numerique geometricarum affectionum interpretes geometricis vocabulis appellantur (ut dixi) planus, quadratus, solidus, cubus à geometrico plano, quadrato, solido, cubo: quorum umbrae quaedam tales numeri sunt. Sic Euclides ait sed specialiter 19 & 20 p 10 rectangulum comprehensum à rectis longitudine symmetris esse rationale: & si rationale ad rationalem comparatum sit, latitudinem efficit rationalem & symmetram basi: ut si rectangulum comprehenditur à basi 4 & altitudine 3, erit rationale nempe 12, & rectangulum rationale ut 12 comparatum sit ad basim rationalem 4, facit latitudinem rationalem nempe 3: Quae leges multiplicationi & divisioni numerorum congruunt. Sed id generaliter de quavis figura rationali seu plana seu solida verum est, & in solida basis sumitur pro duplici dimensione longitudinis & latitudinis. Itaque Aristot. generaliter ait 7 c 1 Post. arithmeticae demonstratione magnitudinum accidentibus convenire, cum magnitudines numeri sunt: Et Proclus ait quicquid in geometria *πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς* explicabile & cognobile sit, numeris explicari & cognosci. Sed Proclus idē huc nescio quomodo intuens nec satis animadvertens ait figuram esse propriam geometriae, quod verum est: sed addit figuram à geometria ad arithmetica *κατὰ ἀναλογίαν* pervenire. Analogia igitur ista mathematicos omnes & graecos & latinos decipit, ut figurarum numerorum doctrinam arithmeticae attribuerent, eo moti fortasse, quod videatur multiplicatio (quae propria est arithmeticae) omnes talium figurarum affectiones explere, sine continuitate, sine contactu, sine angulo, sine situ, id est sine magnitudinis affectione. Verum magna differentia hic est. Multiplicatio enim arithmetica est unitatum, ut 4 per 3 facit 12 unitates: at cum lineam 4 pedum ducis angulo recto secundum lineam 3 pedum, facis non lineam 12 pedum, sed superficiem planam 12 pedum quadratorum, aliudque omnino est generis arithmetica, aliud geometrica: principiumque numeri est pars numeri, principium magnitudinis non est pars magnitudinis. Itaque rerum quidem magna hic dissimilitudo est, verborum autem sola similitudo: ac licet figurarum & planarum & quadratarum item solidarum & cubicarum quaedam affectiones numeris explicentur, non tamen omnes explicantur. Neque enim quadratum vel cubum arithmetica duplicare potest, quod utrumque ta-

men geo-

men geometria proficitur. Neque vero geometriae corpus suis membris constabit, si praeccepta de planis & solidis numeris ad arithmetica referantur, & absurdum fuerit species figurae in arithmetica precedere, genera in geometria sequi. Denique usus geometricus disceptator & iudex controversiae huius esto, quem in figuratis numeris extra geometricas figuras, nullum deprehendes, & talis arithmetica quaedam consequentibus artibus specialis accommodata est in sonis, in astris: ut arithmetica hic geometrica, illic musica, istic astronomica dici possit, absolute arithmetica nequaquam, quaeque extra geometriam, musicam, astronomiam inutilis esset futura. De planis itaque & solidis numeris tanquam planarum & solidarum figurarum adjunctis umbris in geometria suo loco praecipendum fuit, & iis numeris utendum quoties magnitudines numeri fient, ut vere Aristoteles monuit, nec heterogenia hic erit, cum superioris & altioris doctrinae usus in subalterna & inferiore doctrina adhibebitur.

IO. *Figurae Isoperimetrae sunt figurae aequalis perimetri.*

Affectiones unius figurae adhuc fuerunt in ordinatione, primatum, ratione, sequitur duarum figurarum comparatio in ratione, proportionem, similitudinem. Qua si nihil in geometricis rebus praestantius esse dixerem, nihil a veritate (opinor) aberrabo. Axiomata enim sequentia maximam in geometria partem complectuntur, primaque sunt sui quodque generis & antiquissima. Itaque postulanda & exemplis illustranda sunt, ratio est in Isoperimetris. Sic triangulum perimetri 16 pedum est Isoperimetrum triangulo 16 pedum, quadrato 16 pedum, & circulo 16 pedum: nec isoperimetria homogeniam figurarum requirit, sed tantum aequalem ambitum: unde manifestus est error mathematicorum qui figuras isoperimetricas definiunt, quae intra eundem orbem inscriptae sunt, vel quarum anguli eundem ambitum capiunt, cum aequalis & inaequalis perimetri figurae in eundem orbem inscribi possunt, & triangulum quadratumque eidem circulo inscripta capiunt illud tribus, hoc quatuor angulis eundem ambitum: nec tamen sunt isoperimetra, & circuli ipsi inter se ad talem definitionem nunquam essent isoperimetri. Definitio illa fuit Omnis sancti in Cusani Cardinalis mathematici interpretis, quo errore imbuti postea multi & doctissimi latissime propagaverunt.

II. *Ex isoperimetris homogeneis ordinatius est majus, ex heterogeneis ordinatis terminatius.*

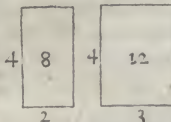
Geometricum axioma de ratione figurarum ex isoperimetria, Theon primo magnae constructionis repetit a Zenodoro. Idem tractatum plenius est a Pappo quinto libro: & a Proclo propositum in Timaeum Platonis: & ad 4 & 27 p 1: Archimedis etiam scripta quaedam de isoperimetris praedicantur. Ordinatus vero in theoremate intelligatur etiam pro minus inordinato. Sic triangulum aequilaterum erit majus isoperimetro inaequilatere, & aequicrurum vario. sic in quadrangulis quadratum majus non quadrato. sic oblongum ordinatius est majus minus ordinato oblongo. Sic ex heterogeneis ordinatis quadratum majus minus ordinato oblongo. Sic ex heterogeneis ordinatis quadratum majus minus ordinato oblongo.

d jus tri-

ius triangulo, & circulus quadrato, quia quadratum est $\pi\lambda\alpha\nu\pi\lambda\alpha\nu\pi\omega\tau\epsilon\rho\epsilon\sigma\sigma$, & pluribus terminis constat quam triangulum, & circulus quam quadratum. Sic in solidis icosaedrum majus est dodecaedro. Zenodorus in planis $\pi\alpha\lambda\upsilon\gamma\omega\gamma\iota\omega\tau\epsilon\rho\epsilon\sigma\sigma$ seu $\pi\alpha\lambda\upsilon\pi\lambda\alpha\nu\pi\omega\tau\epsilon\rho\epsilon\sigma\sigma$ quod in planis idem est: Pappus in solidis $\pi\alpha\lambda\upsilon\pi\lambda\alpha\nu\pi\omega\tau\epsilon\rho\epsilon\sigma\sigma$ majus efficit, quod in solidis non sit idem quod $\pi\alpha\lambda\upsilon\gamma\omega\gamma\iota\omega\tau\epsilon\rho\epsilon\sigma\sigma$. Ratio isoperimetrorum ea est, ex cuius ignoratione $\psi\alpha\lambda\alpha\gamma\alpha\rho\iota\alpha$ infiniti per omnes humanæ vitæ partes erroris orta est, Isoperimetra esse æqualia. Hinc enim geodesia in agrorū dimensionibus fraudulenta, hinc geographia in regionibus & insulis mendax & mendosa, cum geographi metiuntur insulas numero dierum, quibus circumcuntur & circumnavigantur. Metire isoperimetris mensuris altera cylindracea, altera cubica frumentum, longe inæqualem capacitatem reperies. sed summa figurarum capacitas & perfectio in isoperimetris ita summam concludatur.

12. Si figura prima sunt æquealta, sunt ut bases: & contra.

Ex elementis geometricarum comparationum primū fuit in ratione isoperimetrarum figurarum: secundum sequitur in proportionē primarum figurarū, aurea vere, si illud primum argenteum fuerit. Proportio numerorum geometrica dicitur in arithmetice regulis, aurea regula: Hac vero proportio figurarū in geometricis figuris longe amplissima materia laudis aurea quoque possit appellari: pertinet enim non ad primas solum, sed argumento proportionis ad primarum multiplices. Hoc igitur aurum quanto abundantius, tanto cupidius & avidius excipiendum. Proportio primarum figurarum hic duplex est, prima est directa in æquealtis. Hoc directum proportionis geometricæ in primis aurum ex arithmetica lege directæ proportionis derivatum est, non est tamen rationale, nec explicabile numero in primis ipsis figuris, sed tantum in earum quibusdam æquemultiplicibus, quæ suis simplicibus sunt proportionales. E' logico proportionis axioma æquemajorum patuit in arithmetice. Si numerus numeros multiplicet, facti erunt proportionales multiplicatis. Itaque æquem altarū vis explicabilis est in figuris rationalibus. Ut in duobus parallelogrammis rectangulis eadem altitudo 4 duas bases 2 & 3 multiplicet: facta parallelogramma 8 & 12 sunt proportionalia basi bus 2. 3. Itaque ut 2 ad 3, sic 8 ad 12: Idem erit postea in rectis prismatis & cylindris. In planis parallelogramma sunt duplicia triangulorum: in solidis prismata sunt triplicia pyramidum, cylindri triplices conorum. Hac (inquam) causa propositi axiomatis sic numero explicari potest in multis: quæ tamen antiquior in primis figuris, triangulis pyramidibus, conis est, quam in triangulatis, pyramidatis, conicatis, quamvis numero explicari non possit. Hoc axioma prædicanda per universam geometriam fecunditatis est: Hinc enim propositiones in elementis novēdecim oriuntur 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41 p 1: 1 p 6. 25. 29. 30. 31. 32 p 11: 4. 5. 6. 11. 13. 14 p 12, præter rotundas figuras, ut circulos & sphaeras, in quibus veritas est eadem, si diameter pro basi intelligatur, ut 2 & 18 p 12 Euclides intelligit: item præter innumerabilia consecutaria, quæ per universam



universam geometriam ē i p 6 ducentur. Hæc (inquam) aurea geometria tam copiosa ex altera primarum figurarum proportionē nobis erit, unde nihil inveniendi spatia figurarum, attamen ē solis basibus ratio ipsarum æqualitasque vel inæqualitas poterit explicari. Conversio autem protinus patet, figuræ primæ ut bases sunt æquales, nempe cū facti sunt proportionales multiplicatis, numerus idem multiplicavit.

Itaque

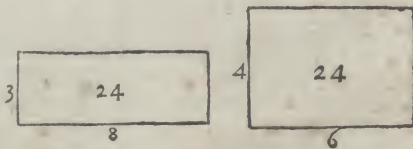
Si sunt in basi æquali, sunt æquales.

Sic triangula, sic parallelogramma, quæ est 3 5. 3 6. 3 7. 3 8 p 1, quo possunt etiam referri 3 9 & 4 0 p 1. Sic ceteræ figuræ propositæ in æquali basi æquantur.

13. *Si figuræ primæ sunt reciproca basi & altitudine, sunt æquales: contra.*

Sed jam proportionis geometricæ alterum aurum dicatur in reciprocatione, prius enim fuit in directâ proportionē, & hæc ex arithmetica aurea regula est proportionis reciproca, sed figuris primis accommodata. Euclides altitudinum & basium proportionem reciprocationi subiecit, & 2 d 6 reciprocationem figuris tanquam propriam attribuit, & figuras reciprocas ait esse, quando in utraque figura sunt antecedentes & consequentes termini, id est quando rationum termini in utraque figura recipiuntur: sitq; ut primus terminus primæ ad primam secundæ, sic secundus secundæ ad secundum primæ. Verum reciprocatio res arithmetica est omnino, ut in arithmetica nostra docuimus. Atque hic conclusum sunt 14. 15 p 6, 3 4 p 11, 9. 15 p 12. Reciprocatio rationalis & explicabilis est numero non in figuris primis, sed in æquemultiplicibus primarum: ut

jam prædictum in directâ proportionē, ut sunt rectangula parallelogramma duo, inæqualia basibus & altitudinibus 3. 8. 4. 6. ut hic vides. Proportio reciproca est ut basis 3 ad basin 4, sic altitudo 6 ad altitudinem 8: & parallelogramma ipsa sunt æqualia, nempe 24 & 24: Sumto solida duo inæqualibus item basibus & altitudinibus (quæ hic etiam basis est pro longitudine & latitudine) 12. 2. 3. 6. 3. 4. solida ipsa erunt 72 & 72, ut hic vides, & proportio inter reciproca est basium & altitudinū: ut enim 24 ad 18, sic 4 ad 3. Et causa est ex ipsa aurea proportionis in arithmetica lege, quia bis bina latera sunt proportionalia, ideoque factæ ab iis areæ sunt æquales. Et vicissim ex eadem lege, quia areæ sunt æquales, termini quatuor sunt proportionales, quæ conversio est præsentis axiomatis.



14. *Figurae similes sunt figurae equiangularae & proportionales cruribus aequalium angulorum.*

Geometricum aurum in figuris primis tum aequalitatis tum altitudine & basi reciprocis expositum est, superest in similibus omnium purissimum & pretiosissimum aurum. Primo similes figurae definiuntur, deinde comparantur. Similitudo figurarum est, non primarum modo & à primis multiplicium, sed omnino omnium, & duabus rebus comprehenditur aequalitate angulorum & proportionem crurum: & duae figurae dicuntur similes tali synecdoche particularium & angulorum aequalium & crurum proportionalium, qua figura rationalis dicta est ratione laterum rationalium. Neque duo termini ut duae figurae similitudinem faciunt, ut neque illic unicus terminus ut unica figura rationem facit. Verum definitio similitudinis in figuris magnam geometris anxietatem attulit, ut in unoquoque figurae genere nova similitudinis definitio facta sit: 21 d 7 de figuratis numeris similibus: ut 1 d 6 de similibus rectilineis, 10 d 3 de sectionibus similibus, 7 d 11 de similibus inclinatis, 9 d 11 de similibus solidis, 24 d 11 de conis & cylindris similibus: Hinc etiam novae definitiones de segmentis conicis similibus apud Apollonium, de similibus sphaeroidibus apud Archimedes, de quibus in scholis. Circuli autem & sphaerae similes intelligentur ex illa polygonia infinitorum laterum, ut suo loco de singulis intelligetur.

itaque
1. *Habent homologos terminos aequalibus angulis subtensos, & aequales, si ipse sint aequales.*

Confectarium est & proxima generali definitione in rectiterminis praecipuum: & ita sumitur à Theone ad 4. 5. 6 p 6 in rectilineis, sed nos generale etiam fecimus, & homologos terminos appellamus & sumptis proportionalibus, primum & tertium, secundum & quartum, id est alternos: Homologia enim & *ἀνλογία* γ' 11 & 12 d 5 eadem res est, uti in scholis illius loci docuimus. Pars ultima de aequalitate terminorum est lemma Theonis ad 22 p 6. Et

2. *Similiter sitae sunt, quando termini proportionales simili situ respondent.*
Euclides appellat 18. 26. 27. 31 p 6, 27 p 11 similiter sitas figuras, vel similiter descriptas, ut in cōsectariis 19 & 20 p 6, & 22 p 6, & 37 p 11, neque definit, sed res tamen ea est in situ simili, cum nempe supera superis, infera inferis, & reliquae loci differentiae congruant: & apud Archimedes in Isorropicis 9 axi, similiter sita puncta in planis similibus definiuntur, à quibus ad aequales angulos recte faciunt aequales angulos cum homologis lateribus: situs ille similis necessario exigitur ad 26 & 27 p 6. Et

3. *Similes eidem sunt, similes inter se.*
Euclides speciale id fecit de rectilineis similibus 21 p 6. Patet autem protinus ex ipsa definitione similibus. Similitudo enim duarum figurarum ad eandem concludit & aequalitatem in angulis, & laterum proportionem inter se. Et

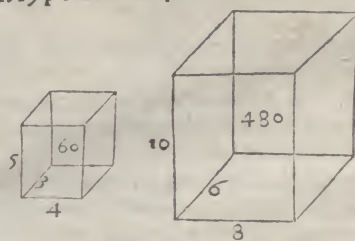
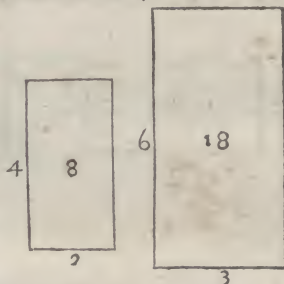
4. *Si partibus datae figurae partes ad datum terminum similes similiterque sitae constituantur, figura constituetur similis datae similiterque sita.*

Hac

Hæc fabrica specialiter proponitur ad 18 p 6, & 27 p 11.

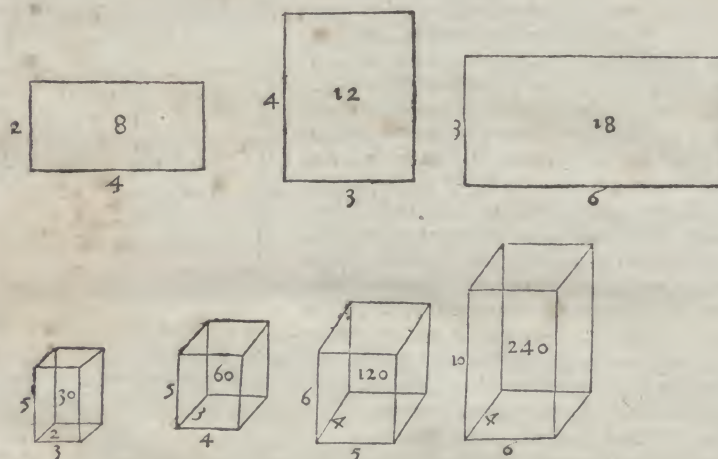
15. *Figuræ similes habent rationem homologorum laterum æquemultiplicatam dimensionibus, & medium proportionale una minus.*

Jam aurum sequitur illud (ut dixi) pretiosissimum, aurum tamen, ut in cæteris antea generalibus, ex parte tantum rationale & numerabile. figuræ vero planæ duarum sunt dimensionum, solidæ trium: Itaque habebunt illæ duplicatam rationem homologorum laterum, hæ triplicatam. Ratio in rationalibus primo manifestior erit. Numeri plani similes sunt in duplicata ratione homologorum laterum, est 18 p 8, ut 8 ad 18 sunt plani numeri similes, sunt etiam plana iis numeris explicabilia similia: ut hic vides. Nam anguli sunt æquales & æqualium crura proportionalia, quia latera eorum 2 & 4, 3 & 6 sunt proportionalia. At ratio 8 ad 18 est ratio 4 ad 9: quæ est ratio duplicata homologorum laterum, nempe 2 ad 3: ut apparet duplicata ratione 2 ad 3: sic $\frac{2}{3}$ ad $\frac{4}{6}$. Itaque in planis ubi dimensio duplex est longitudo & latitudo, ratio duplicatur, ideoque in parallelogrammis rectangulis (quæ numeris planis respondent) ratio ista est. In triangulis dimidiis parallelogrammorum rectangulorum veritas eadem est, nec per se tamen rationalis & explicabilis numero: in trapeziis etiam & quibuslibet planis rectilineis similibus veritas est eadem: ut etiam nominatim proponitur 20 p 6. solidi numeri similes sunt in triplicata ratione homologorum laterum, est 19 p 8: ut 60 & 480 solidi similes sunt, sunt etiam solida similia quæ iis numeris comprehenduntur, ut hic vides. Quia latera ipsorum 4, 3, 5 & 8, 6, 10 sunt proportionalia. At ratio 60 ad 480 est ratio 4 ad 8 triplicata: sic $\frac{4}{8}$ ad $\frac{6}{12}$ id est 1 ad 2, seu octupla, quod ostendit divisio 480 per 60. Itaque in solidis ubi dimensio triplex est, ratio triplicatur, ideoque in parallelepipedis rectangulis (quæ solidis numeris respondent) ratio ista est rationalis & explicabilis numero. In pyramidibus trientibus prismatum & ratio item eadem est, neque per se tamen rationalis vel explicabilis numero: In conis & cylindris similitudo, inde suo loco percipietur. Quare tertium hoc geometriæ proportionis in similibus figuris aurum per se relucet resplendetque, sed in suo generali & proprio lumine collocatum. Atque hinc apparet labor angoreque Euclidis & Theonis tot locis dispersas ejus micæ



d 3 consecan

consecrantur, 10 d 5, 5 d 19, 20, 23 p 6, 5, 18, 19 p 8, 33 p 11, 2, 8, 12, 18 p 12, de quib. in scholis. sed prima pars adhuc exposita sit, secunda brevius percipitur, quod habeant medium proportionale dimensionibus una minus. Nam inter duas similes figuras planas est una media proportionalis, inter duas solidas sunt dug. Euclidis de planis est 18 & 20 p 8: de solidis est 19 & 21 p 8. Causa que tantum est arithmetica ut prius. Nam si duplicata ratio est numeri ad numerum, necesse est ex continuorum lege unum interesse proportionalem, cujus cum primo etiam sit illa duplicata ratio: si triplicata, necesse est duos interesse, ut hic vides.

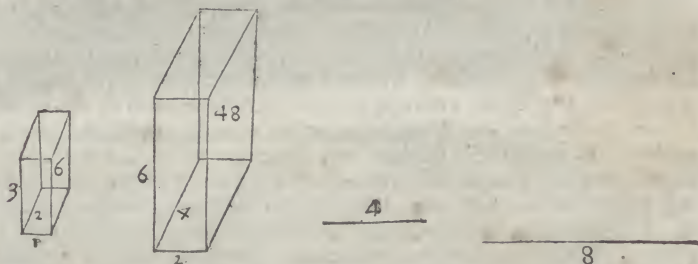
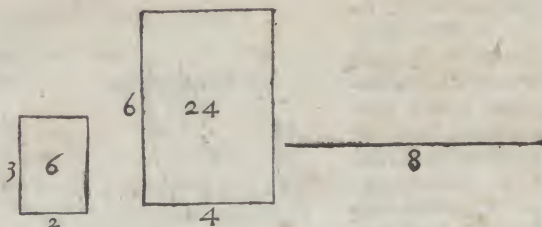


Itaque
1. Si lineæ rectæ sint continuæ proportionales una plures dimensionibus figurarum similium ad primam secundamque similiter sitarum, ut prima recta est ad ultimam, si prima figura est ad secundam: & contra.

Et similitudine figurarum duo consecutaria oriuntur ex parte tantum, ut axioma ipsorum, rationalia & numeris explicabilia. De triangulis & triangulatis consecutaria sunt Euclidis ad 19 & 20 p 6. Si tres rectæ sint continuæ proportionales, erit ut prima ad tertiam, sic rectilineum comparatum primæ ad rectilineum comparatum secundæ simile similiterque situm, quod in numeris parare quadam potest intelligi: ut sunt tres lineæ pedum 2. 4. 8. & ad primam secundamque comparentur figuræ similes pedum 6 & 24: sic nempe ut 2 & 4 sint bases earum: Hic ut prima linea 2 est ad tertiam 8, sic prima figura 6 est ad secundam 24: ut hic vides. Sic res patet in planis de tribus continuis, & causa mani-

sa manifesta est e
proximo axioma
te & duplicatione
rationis in tertio.
De pyramidibus
& prismatis tale
in elementis no-
minatum nihil est:
de prismatis pa-
ralleloptedis co-
nsecrari est ad 33
p 11. Sinto rursus

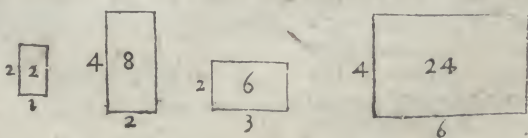
4 lineæ continue proportionales 1.2.4.8. & duo similia solida comparentur ad
primam & secundam: ad primam e lateribus 1.3.2. fit 6: ad secundam e lateri-
bus 2.6.4 fit 48, ut prima linea 1 est ad quartum 8, sic prima figura 6 est ad se-
cundam 48, ut constat divisione, exempla ita sunt.



Atque in hoc consecrario via patet cufuscunque data figuræ duplicandæ tri-
plicandæ & data ratione augendæ. Nam ut prima recta erit ad ultimam, sic fi-
gura prima erit ad secundam.

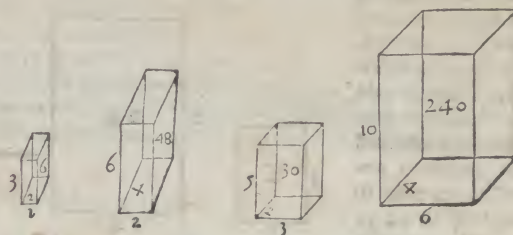
2. Si quatuor rectæ sint proportionales, figuræ similes ad eas similiter sitæ sunt propor-
tionales: & contra.

Euclidis est 22 p 6 de omnibus rectilineis similibus, & 37 p 11 de parallelepi-
pedis, unde generale institui consecrarium potest, uti fecimus: proportio hic e-
tiam ex parte potest explicari, neque tamen continua proportio hic exigitur,
ut antea. Esto in
planis primū exē-
plum. Causa ve-
ro est proportio-
nalium figurarū,
quod bis binæ fi-



guræ hæ

gura habent eandem rationē duplicatam. Secundum exemplum esto. Neq̃ tamē hic figuræ sunt proportionales rectis, ut antea æque altę basibus, sed ipsę inter ipsas, neque eodem genere proportionis sunt proportionales, & causa hic eadem, quæ prius, quia bis binæ figuræ habent eandem rationem, triplicatam.

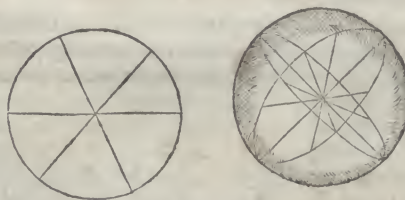


16. *Figuræ complentes locum sunt, quæ circa idem punctum quolibet modo collocatæ nihil inane relinquunt.*

Hæc definitio veterum geometrarum fuit, ut apparet è Simplicio ad 8 cap 3 lib. de cælo: quales figuras Aristoteles ibidem censet tantum ordinatas esse, neque omnes: sed tantum tres in planis triangulum, quadratum, sexangulum: in solidis pyramidem & cubum. Verum si repletio loci iudicetur ex angulis rectis 4 in plano, 8 in solido, oblongum in plano, & octaedrum in solido cõplebit locum (ut suis locis intelligitur) neque satis accurata erit ista Aristotelis geometria. At anguli recti faciunt hoc iudicium: & sic Euclides solida ordinata quinque duntaxat esse demonstrat ex angulis, & ita Potamon geometra apud Simplicium quæstionem de figuris cõplentibus locum demonstrat: Denique si figuræ conjunctis angulis efficiant in plano rectos 4, vel in solido 8, complent locū. De hoc problemate geometria scripta est ab antiquis geometris, & è recentibus Regiomontanus dicitur accurate commētatus esse, & Maurolycus librum pollicetur, quorum nihil dum videre nobis contigit.

17. *Figura rotunda est, cujus radii omnes æquantur.*

Talis erit in planis circulus, in solidis sphaera. Hæc vero figura est ex isoperimetris maxima, ut patuit 12 e. eaque de causa Plato dixit in Timæo hoc σχῆμα τελειώτατον πάντων perfectissimū omnium esse: ideoque deus (ait idem) mundū sphaericum figuravit, ut suo complexu cuncta contineret, & Aristoteles in mechanicis, prob. ait hanc figuram omnium miraculorum esse principium & causam.



causam. Sed ea miracula suo tempore narrabuntur. Rotundum pro figura rotunda dicatur.

1. Diametri in rotundo bisecantur radiis æqualibus.

Quia nempe dimidia sunt radii.

2. Rotunda diametrorum æqualium sunt æqualia. *ē 1 d 3.*

Itaque

Et

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. V.
de lineis & angulis in plano.

Lineatum est superficies aut corpus.

Lineati partitio manifestam intelligentiam habet ē lineati definitione, qua excluditur linea, & comprehenditur superficies & corpus. Atque hinc orta est metricæ artis partitio in geometriā de superficie, & stereometriam de corpore, quomodo Plato 7 de rep. & Aristoteles 7 c 1 Post. geometriam & stereometriam distinguunt, attamen etiam geometriæ nomen ad totam metiendi artem significandum usurpatur.

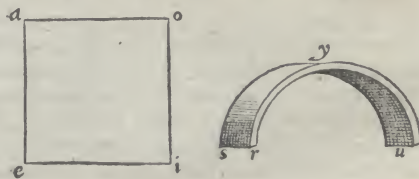
2. Superficies est lineatum duntaxat latum. *3 d 1.*

Ut hic *aeio & uysr* superficiei definitio complectitur intervallum lineæ, longitudinem nempe, sed addit intervallum alterum, id est latitudinem. Itaque superficies definitur à quibusdam (ut Proclus ait) magnitudo duorum intervallorum. At duo intervalla non tam specialiter tamque proprie definiunt: ergo superficies magnitudo longa tantum & lata melius definitur.

Tales (inquit Apollonius) sunt super terram umbræ, quæ longe & late campos occupant: terram vero non ingrediuntur, nec crassitudinis quidquam habent. *ἐνσκιμασία* nomen hic significantius est græce, tanquam diceretur apparentia, quia magnitudinis nihil visibile sit nisi superficies.

3. Superficiei terminus est linea. *6 d 1.*

Res manifesta est in planis: superficies enim trilatera terminatur tribus lineis, quæ



is, quadrilatera quatuor, multilatera multis: circulus una: sphaerica superficies integra, non videtur terminari linea: At si spectetur sphaerica genesis in conversione semiperipheria, principium erit linea, item finis, nempe semiperipheria: & sicuti punctum non solum terminat actu lineam, sed potentia medium est, sic & linea superficiem terminat actu, & lineae innumerabiles per totam superficiem accipi possunt. Superficies igitur creatur motu lineae, ut linea motu puncti.

4. *Superficies est plana vel gibba.*

Differentia superficies respondet differentiae lineae in rectitudine & obliquitate.

5. *Superficies plana est superficies, quae aequaliter intra suos terminos interjacet. e 7 d 1.*

ut vides in a e i o. Quod igitur linea recta in duas partes oppositas spectabat, superficies plana spectat in omnes usquequaque partes, ut superficies plana sit omnium superficialium intra eodem terminos brevissima, & ejus media extremis officiant: denique aequatur intervallo intra duas lineas: potest etiam per unicam rectam explorari quocumque versus applicatam, ut Proclus hic innuit. Planum vero pro superficie plana usurpatur, ut antea rotundum pro figura rotunda, & geometria de planis stereometriae solidorum opposita, & sic Proclus lib 1 cap 13 geometriam de planis a stereometria de solidis separat. Euclides vero quamvis definiendo superficiem faciat genus plani 5 & 7 d 1: attamen totis elementis nullam aliam superficiem instruxit, quam planam, & tres postremos libros *σφαικίους* inscripsit stereometriam solidorum, reque ipsa Platonis & Aristotelis sententiam sequitur. Ideoque ut idem ait ad 7 d 1, Euclides solam superficiem planam de speciebus superficiei definivit, in eaque tanquam in aliquo subiecto abaco contentur figuras planas & earum affectiones, sectiones, contactus, situs, angulorum constitutiones. Talis nimirum planities antiquis geometris abacus ille fuit hyalini pulveris (quem & Tullius eruditum vocat) resperione coloratus: de quo Persii carmen:

*Nec qui abaco numeros & secto in pulvere metas
Scit risisse vaser. —*

Atque hic Proclus phantasiam efficit, veluti planum quoddam speculum, in quod a cogitationibus rationum imagines insuant. De superficie tamen gibba nonnihil suo loco praecipietur.

Itaque licet in plano

1. A puncto ad punctum rectam ducere. 1 & 2 post 1.

Tria deinceps postulatur, primum de linea recta. Linea recta & peripheria 2 lib. definitae sunt, sed utriusque fabrica in plano hic proprie dicitur. fabrica lineae rectae est 1 Post. & iustum duntaxat in plano: neque enim licet in sphaerico intra duo pun-



duo puncta rectam ducere, neque licet intra duo qualibet in conico & cylindraceo, à vertice enim ad basim tantum licet: & tum plani secantis conum & cylindrum terminus est. Ergo (ut dixi) de plana recta id tantum postulari iuste possit, ut à puncto quolibet ad punctum quodlibet recta ducatur, ut hic ab *a* in *e*. Ducendæ vero rectæ in plano geometricum instrumentum dicitur Amussis, Ptolemæo 2 cap. 1 musica regula, quale hic vides: à puncto autem ad punctum iuste postulatur, non ad puncta: neque enim puncta omnia in rectam cadunt, sed in obliquam pleraque. Et in sphaera, cono, cylindro, regula intra duo puncta possit esse, sed sphaerica, conica, cylindracea. Quin exemplo rectæ postulat Vitellio 2 p 1 intra duas lineas superficiem extendi: & sic videatur in elementis de figuris plerisque planis solidisque postulari: ut figura describatur ad 7 & 8 p 2: item figura compleatur ad 8. 14. 16. 23. 28 p 6, quæ sunt de planis, ite ad 25. 31. 33. 34. 36. 40 p 11, quæ sunt de solidis: sed tamē superficies plana, & corpus planum rectitudinē suā metiuntur linea recta, ut ius postulandi in linea recta plana primarium videatur. Continuatio autē rectę lineę nihil aliud postulat, quā prolongationē sã ductæ rectæ, & quidē à puncto ad punctum, ut recta *a e* licet continua re in *i*. Quare primum & secundum postulatam Euclidis in unum conueniunt. Et



2. Rectā ponere ad datum punctū æqualem datæ, & à maiore secare æqualem minori. 2. 3 p 1. Ut data

Ut data sit ae , & ad punctum i ponatur α equalis io : item sit ae maior quā io , & secetur congruente regula α quāte minor em au , ut hic. Nam si quis mente tantum id fieri putet oportere, is etiam regulam mente complectatur, ut regula opera faciat, neque vero fabrica α quāda & α equalis amputanda linea difficilior est, quam dato puncto & intervallo peripheria describenda, quam datis triangulo, parallelogrammo, semicirculo describendi conum, cylindrum, sphaeram, quae tamen omnia Euclides in principiis habuit.

Recta una duaeque intersectae sunt in eodem plano. ϵ 1 & 2 p 11.

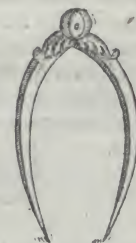
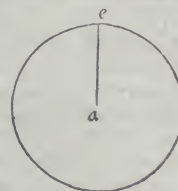
Recta una potest esse communis sectio duorum planorum, tota tamen in plano eodem est una & tota in eodem altero: Atque ita tota est in eodem. Duae rectae intersectae possunt esse in duobus planis intersectis, sed planum per eas duci potest. Itaque ambae erunt in eodem plano: & planum hoc geometricè concipiendum, quod linea obliqua uni, vel duabus intersectis non semper idem subicitur, cum peripheria sit in sphaerico, nec omnes intersectae peripheriae in uno plano esse possunt.

Itaque

Et

3 Data recta peripheriam describere.

Hae fabrica est ϵ 3 Post. Dato centro & intervallo circumsum describere. Sed hic: terminus circuli tantum quaeritur, qui est definitione peripheriae melius ducitur & in plano duntaxat ista rectae conversio fieri potest, non in sphaerico, non in conico, non in cylindraceo, nisi a vertice ubi peripheria tamen esse potest. Itaque antea generalis fabrica fuit peripheria, hic autem tantum plane, ut hic. Ut vero regula fuit instrumentum ducenda recta, sic modo est circinus peripheriae describenda, cruribus rectis an valgis nihil interest, ut hic vides. Circinus vero est geometricis instrumentis instrumentum longe praestantissimum est, cujusque machinatione nobiles geometrae prodiderunt omnia geometriae problemata confici posse: & extat Ioan Baptistae liber, quod una circini apertura omnia Euclidis problemata resoluantur: & Cardanus mathematicus.



in signis:

in signis lib. 15 subtilitatum scribit à se & à Ferrario inventam circini opera omnium ab Euclide demonstratorum demonstrationem. Talus Dædali ex sorore nepos hoc instrumentum invenisse dicitur 8 Metamorph.

—Et ex uno duo ferrea brachia nodo

Iunxit, ut æquali spatio distantibus ipsis

Altera pars staret, pars altera duceret orbem.

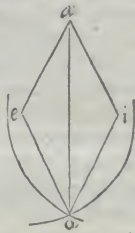
Itaque

Radii ejusdem vel æquales peripheriæ sunt æquales.

Quia eadem recta est ubique conversa. Atqui hic radius peripheriæ pro radio figuræ peripheria comprehensæ intelligatur.

6. Si due æquales peripheriæ à terminis æqualium crurum dati anguli rectilinei ante concurrant; recta à concursu ad verticem bisecabit angulum. 9 p 1.

Adhuc de lineis planis, sequitur ipsarum affectio, primum in anguli bisecatione. Esto igitur datus angulus rectilineus æqualium crurum ae, ai , & due peripheriæ æquales ab e & i terminis crurum ante angulum concurrant in o , rectaque ducatur ab o in a , dico datum angulum bisecari: ductis enim rectis oe, oi , anguli oea & oia æquicruri ex thesi & ex communi latere æquantur basi, eo & io , per c 3. Post. quia sunt radii æqualium peripheriarum. Itaque per i c 6 & 3 anguli oea & oia æquantur, & ideo angulus totus est bisectus.



7. Si due peripheriæ æquales à terminis data recta utrinque concurrant, recta per concursus bisecabit datam. 10 p 1.

Esto data ae , & peripheriæ æquales à terminis a & e concurrant in i & o , & ducatur recta io , dico à ducta bisecari datam ae , quia ductis radiis æqualium peripheriarum ia & ie bisecat per præcedentem angulum aie . Itaque ai & ie æquales & æquicruri, cum crura sint æqualium peripheriarum æquantur basi, iu & ue , per i c 6 & 3. Quare cum partes iu & ue sint æquales, data ae est bisecta.



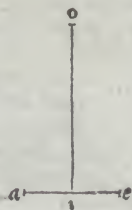
8. Si recta in rectam perpendicularis insistit, facit angulos deinceps resptos: & contra.

Insistit recta in rectam quæ secatur nec secatur: & anguli sunt deinceps quos insistens efficit cum subiecta, ut patet è Proclo ad 15 p 1. ut hic ae intersecta, & i

e 3 insistens

8.

Insistens sunt perpendicularares, anguli deinceps *410* & *410* recti erunt per 7 e 3. Perpendicularum vero commune est omnium linearum. Attamen præcipue in planis rectis animadvertitur, & hic idcirco attentius consideretur. Hinc enim postea è communi definitione deprehenditur in cæteris magnitudinibus: sic recta iudicatur perpendicularis peripheriæ, quâdo est perpendicularis rectæ per cõmunẽ sectionẽ trãseuntĩ: sic duæ peripheriæ iudicantur inter se, perpendicularares: sic postea linea recta perpendicularis plano, & planũ plano perpendicularare dicitur, 3. 4 d 11, & à Vitellio de ad 5 d 1: sic rectarũ linearũ perpendicularo corpora ipsa inter se perpendiculararia iudicantur. Quod Tullius in epistola ad frat. 3 lib. discrete significavit. Columnas (ait) neq; rectas, neq; è regione Diphilus collocarat, eas scilicet demolietur, & aliquando perpendicularo & regula discet uti. Hic orator columnas rectas pro perpendicularibus plano horizontis, & è regione pro parallelis intelligit, & rectitudinem columnarum perpendicularo linear rectæ expendit. Atqui perpendiculari per totam geometriam utilitas immensa erit in rectangulis & planis & solidis. Regula primum fuit instrumentum geometræ in dirigendis lineis, circinus secundum in describenda peripheria. Norma vero est tertium instrumentũ in linea recta recte erigenda in eodem plano super rectam, atque inde superficiem & corpus supersuperficiem corpusve. Norma igitur sic est. Perpendicularum vero è plumbo & filo architectis physicum est, quia gravia suo pondere rectis lineis ad perpendicularum ferantur, quod à Theone primo magnæ cõstructionis demonstratur. Instrumentum duplex ita est. Primum ad explorandum perpendicularum sublime, ut utrum columna vel structura quavis recta sit ad planum horizontis, necquoquam acclinet. Secundum est ad explorandum planiciem plano horizontis parallelam. Itaque cum filum ab angulo recto in medium basis inciderit, indicabit libratam longitudinem. Galli nivellum, Itali livellum, item achipendulum, Latini libram vel libellam dicunt.

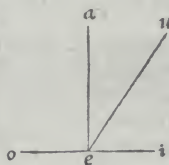
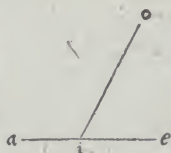


Itaque
1. Si recta



1. Si recta insit in rectam, æquat deinceps angulos duobus rectis: & contra. e 13 & 14 p 1.

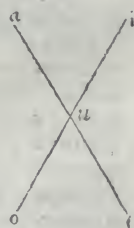
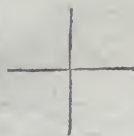
Nam duo tales anguli cum duobus rectis eundem locum occupant: si insitens sit perpendicularis, faciet rectos: si obliqua obliquos, ut hic aio & cio eundem cū duobus rectis locum occupant. Conuersio per impossibile cogitur, quia pars æquaretur toti. Esto igitur insitens ae , quæ æquet duos deinceps angulos aeo & aei duobus rectis: dico oe & ei unam esse rectam. Secus cōtinuet oe in u per i c 5 e. Iā per i c 8 e, aeo & aeu æquantur duobus rectis, quibus item æquantur oca & aei ex thesi: tollatur communis oea , relinquetur aeu æqualis aei , pars toti. Hinc constat duas rectas oe & ei unam esse & continuam rectam.



Et

2. Si due rectæ interfecantur, æquant angulos ad verticem, & omnes quatuor rectis. 15 p 1.

Anguli ad verticem seu verticales dicuntur, qui in eodem puncto vertices oppositos habent. Demonstratio autem est: quia intersectæ vel sunt perpendiculares, & recti æquantur, ut hic: vel sunt obliquæ, tūque verticales etiam æquantur, ut ani & one : item aoi & ue , æquales vero sunt ani & one , quia per i c 8 e cum cōmuni ao æquantur duobus rectis: ideoque etiam inter se. Quare detracto illo cōmuni relinquuntur æquales. Addit huc Proclus Euclidis corollarium à Theone prætermittum, angulos duarum intersectarum æquari quatuor rectis, ex eoq; corollario ait inventum esse admirabile à Pythagoreis theorema, ordinatis figuris cōpleri locū planū triangulo, quadrangulo, sexangulo: solidum tetraedro, & hexaedro: de qua Aristotelis geometria prædictum est. Sed de singulis suo loco dicetur subtilius. Potuit etiam Proclus huc addere. Quotlibet in cōmuni puncto intersectarum angulos æquari quatuor rectis, quia cum quatuor rectis eundem locum occupant.

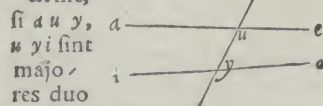


Et

3. Si rectis

3. Si rectis recta sectis interiores eadem parte anguli sunt majores duobus rectis, oppositi minores sunt.

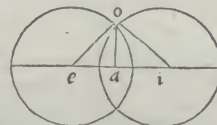
Uthic,



si auy , ayi sint majores duobus rectis, euy , uyo , erunt minores.

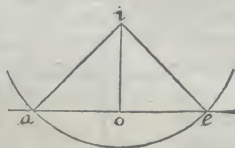
9. Si á dato data recta infinita puncto duæ partes utrinque secantur æquales, & á punctis sectionum duæ æquales peripheriæ concurrant, recta á dato puncto in concursum erit perpendicularis super datam. II p I.

Vt esto punctum a datæ rectæ infinitæ, & ab eo utrinque secantur per $2c5e$ ae & ai , tum duæ peripheriæ æquales á punctis e & i concurrant, ut in o , recta á dato puncto a in concursum o erit perpendicularis super datam, quia ductis rectis oe & oi anguli $ea o$ & $ia o$ utrinque æquivalentur per fabricam e segmentis utrinque æqualibus & communi latere æquantur basi, per $3c5e$: & ideo æquantur per $1c6e3$. Itaque ao cum æqualiter interfacet, per $1o$ $e2$ est perpendicularis.



10. Si pars data rectæ infinitæ secetur á peripheria á dato extra puncto, recta á dicto puncto bisecans dictam partem erit perpendicularis super datam. 12 p I

Datæ
rectæ infinite
pars ae
secetur á
peripheria
exteriori
centri
 i , & recta
 io bisecet



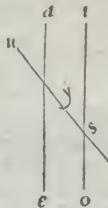
dictam partem, dico io esse perpendicularem: interfacet enim æqualibus angulis aoi & $eo i$ eadem de causa, qua demonstratur perpendiculum superius.

Atque hæc de perpendiculo rectarum planarum: sequitur de parallelismo.

II. Si duæ

II. Si duae rectae in eodem plano nusquam concurrunt, sunt parallelae. *é 35 d 1.*

Id Eu-
clides.
iuste
positu-
lavit.
Tū e-
nim
perpe-
tuo a-
quid



stabunt. Ut hic *a e, i o.*

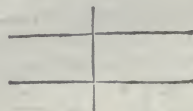
Itaque

Si recta infinita secat alteram e rectis parallelis infinitis, secabit reliquam.

Ut in eodem exemplo *u y* secans *a e* secabit etiam *i o*: secus si non secaret, esset ad eam parallela, per *11 e*. Ideoque & ad primam per *c 11 e 2*. Idque contra the-
sin: Proclus ad *29 p 1* deducit hoc confectionem ex Aristotele *1 lib. de calo.*

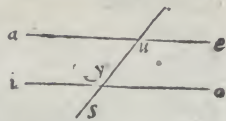
12. Si rectae rectae secantae sunt parallelae, aequant angulos interiores ead-
dem parte duobus rectis, & inter se alternos, & exteriorem interiori op-
posito: & contra. *29. 28. 27 p 1.*

Parallelismus rectarum recta secarum triplicem angulorum aequalitatem con-
cludit, & ab earum qualibet vicissim concluditur. Primi anguli suis verbis sa-
tis explicantur: alterni autem verbum hic est situs (ait Proclus) quod in arith-
meticis est proportionis, cum antecedens antecedenti comparatur, metapho-
ra tamen respondet. Ut enim acutus est ad suum deinceps obtusum: sic in alte-
ra parte acutus est ad suum deinceps obtusum. Itaque alterne ut acutus ad a-
cutum, sic obtusus ad obtusum. Exterior autem interiorque oppositi sunt, quo-
rum alter est extra parallelas, alter intus eadem par-
te non deinceps, sed super eandem rectam tertius ab
exteriore. Proprietatis hujus triplicis causa est e per-
pendiculo, quod incidens in parallelas omnem hanc
varietatem ostendit: Ut hic recti sunt interiores eadē
parte: item alterni, item exterior & interior, ideoque
aequantur & interiores duobus rectis, & alterni inter se, & exterior interiori op-
posito. Quod si secans obliqua sit, parallelis idē ex eōtrario accidet. Obliquati-
one enim ista, manētib. rectis & immutatis, pariter tum interiorū alter *e u y* ob-
tunditur, alter *u y o* acuitur: tū alterni acuitur & obtunditur: tū exterior interior
que oppositi pariter obtunduntur & acuiuntur. si quis tamen interiores in aequa-
les duobus rectis dicat, eodem argumento utraque parte & majores duobus
rectis & minores dixerit (ait apud Proclum Ptolemaeus) ut in rectis parallelis

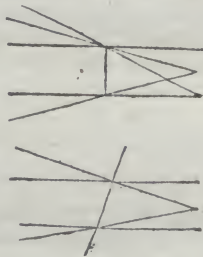


f a e & i o

ae & io sectis, recta uy , si dicas auy & iyu maiores duobus rectis, anguli deinceps per 3 c 8 erunt minores, qui tamen iidem eodē contradicentis proposito etiam maiores essent. Idem erit impossibile, si minores duobus rectis dicantur. Secunda pars & tertia ē prima concludi possunt, secūda sic. Bis bini anguli æquantur duobus rectis oyu & euy per superiorem partem: item auy & euy per 1 c 8 e. Itaque æquantur inter se: tollatur communis angulus euy ab æqualibus, reliqui alterni ad u & y æquales relinquentur. Tertia sic. Anguli euy & oyu æquantur eidem uy per secūdam proprietatem & per 2 c 8 e. Itaque æquantur inter se. Conversa prima pars hic item clarior est ex illa communis perpendiculi luce: Ac si cui interioribus angulis æquantibus duos rectos rectæ tamen concurrere



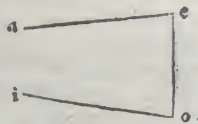
videantur, ut si ipsi æquales sint recti, ut hic, necesse esset duas rectas communi perpendiculo divisas altera parte acclinare, altera declinare, vel saltem alteram, contra 10 e 2. Si obliqui sint, ut hic, lineis inter se obliquatis anguli minuentur altera parte, altera augebuntur. Itaque æquales duobus rectis non essent, contra thesim. Hinc secunda pars & tertia concludi possunt, secūda sic. Anguli alterni ad



y & u æquantur diis interioribus per 1 c 8 e, quia utrique æquantur duobus rectis: Atque ita per primam partem secunda concluditur. Tertia similiter per secundam, quia exterior oyu æquatur opposito ad verticem per 2 c 8 e. Itaque cū exterior & interior oppositi æquantur, alterni quoque æquantur. Quare ut parallelismus triplicem angulorum æqualitatem, sic triplex angulorum æqualitas parallelismum coarguit.

Itaque
1. Si rectæ rectæ connexæ faciunt interiores angulos eadem parte minores duobus rectis, eodē continuatæ concurrent.

Ut a e
& io. Assumptio
& cōple-
xio est ad
12 e de re



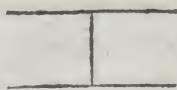
ctis in eodem plano. Si rectæ rectæ sectæ sunt parallelæ, faciunt angulos interiores, eadem parte æquales duobus rectis. Ergo si non faciunt æquales, sed minores, non erunt parallelæ, sed concurrent. De hoc consuetario est in scholis, ut Euclidem, Ptolemaum, Geminum exercuerit.

Et

2. Rectæ

2. *Recta connectens rectas parallelas est in eorum plano. 7 p 11.*

Vt hic *uy*
connectens
parallelas *ae*
& *io*. Postu-
latur ab Eu-
clide 35 d 1,

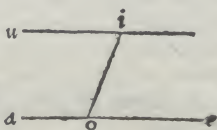


quod parallelæ sunt in eodem plano: & quod eas connectens sit in ipsarum pla-
no, patet per 2 c 5 e. Et

3. *Si recta a dato puncto cum data faciat angulum, anguli facto equati ex alterni crur alteri
erit parallelum data rectæ. 31 p 1.*

Ut data sit *a e* & punctum *i*

à quo recta sit *io* faciens cum
data angulum *ioe*, cui ad *ia*
quetur alternus *oiu*, recta
(quæ est crur alterum) est pa-
rallela data: potest vero æ-



quari angulus per primam proprietatem, & sic vulgo architecti erecto perpen-
diculo æquant: potest item per exteriorem similime. Et

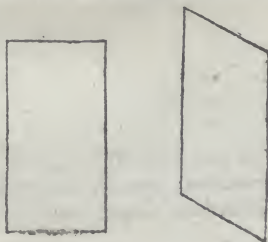
4. *Anguli crurum alterni parallelarum sunt æquales.*

Confectariū
est 6 tertia
proprietate:
unde Eucli-
des fecit 10
p 11, ut hic
vides altero
interioris
crure conti-
nuato.



5. *Si parallele conterminent parallelas, oppositæ æquantur. 6 34 p 1.*

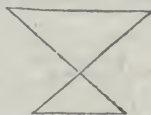
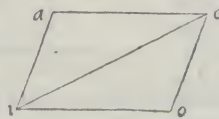
Alioqui parallelæ non
essent. Quod 6 perpendi-
culis connectentibus in-
telligitur, quæ ex defini-
tione sunt æqualia inter
parallelas, & si 6 perpen-
dicularibus fiant obli-
quæ, manebunt æquales
mutatis angulis. Et



1 2 6. Sires

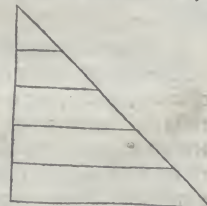
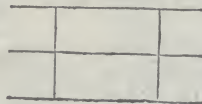
6. Si recta conterminent eadem parte æquales & parallelas, sunt æquales & parallelæ.
33 p. 1.

Potuit vero elementum concludi è proximo, addici tamen etiam potest ex antecedentibus: ut ae & io æquales parallelæ cōterminentur, ab ai & eo , & ducat ei . Hic quia recta ei incidit in parallelas ae & io , anguli alterni aei & ioe æquantur per 12 e, & æquantur crurib. ae & io per thesin & ei cōmuni. Itaq; per 1 c 6 e 3 æquantur basi ai & eo . Hoc primum est. Tum per 12 e, anguli alterni eia & ieo æquantur inter se, eosque faciunt rectæ ai & eo secæ per rectā ei : sunt igitur parallelæ, quod erat secundum. Eadem vero parte dictum est, ne oppositis terminis, connexas rectas quispiam intelligeret, ut hic.



13. Si linæ rectæ parallelis pluribus rectis intersecantur, intersegmenta sunt proportionalia. è 2 p 6 & 17 p. 11.

Adhuc de perpendiculari & parallelismo planarum, rectarum proportio potissima est, cujus elementum veritatis suæ causam ostendit ex ipso parallelismo, idque per omnes rationis species æqualitatis & inæqualitatis majoris minorisque. Nam si intersecæ sunt perpendiculares, segmenta intra duas parallelas æquantur: Communia enim perpendicularia parallelismum faciunt, ut antea jam patuit: ut hic. Quod si intersecæ annuant, non jam segmenta quidem illa bina æqualia sunt, sunt tamen proportionalia: quantoque major intersecæ fuerit, tanto maiora erunt ipsius intersegmenta, quanto minor tanto minora. tertia autem parallela in vertice nō expressa tamē intelligatur.



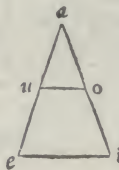
Hæc per species inductio rationum est Euclidi 1 33 p 6 demonstratio, ut in scholis dicitur. Est autem elementum hoc magnæ fecunditatis: hinc enim est primum sectio linæ secundum datam rationem, & inventio tertiæ & quartæ proportionalis.

Itaque

1. Si recta

1. Si recta cum data faciens angulum secetur data ratione, parallela a segmentorum terminis in finem datae & contingens in ea punctum secabunt datam data ratione.

Consecutarium est valde generale ad omnem datam rectam sectionem sive bifariam sive trifariam, sive quolibetariam, sive omnino ratione quamcunque de deris, secanda sit. Euclides ex hac materia fecit 9 & 10 p 6. Secunda sit primo data recta ae bifariam, rectaque cum data faciens angulum sita i infinita, seceturque ao , & deinceps per 2 c 5 & aequalis assumatur oi , & ducantur per 3 c 12 & parallela a punctis i & o in e finem datae, & u contingens in ea punctum. Tertia autem parallela per verticem a intelligitur, neque ex primi necesse est. Itaque ae per 13 e bifecatur, & ut ao ad oi , sic au ad ue . sed ao ad oi sunt dimidia partes. Itaque & au , ue sunt etiam dimidia. Atque hic etiam 7 e comprehenditur non argumenti quidem sed effectus generis. At argumentum illud quidem brevius est, hoc autem est generalius. jam secetur ai in tres partes, quarum prima sit dimidia secundae, secundaque

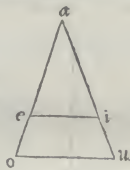


tertia: & contermina datae secetur una parte ao , tum ea duplicetur in ou , denique ui assumatur dupla ipsius ou , totumque diagramma tribus parallelis compleatur ic , uy , os , quarta parallela ad verticem, ut dictum est, intelligitur. Itaque sectio erit in data, quae facta est in contermina per 13 e, quia sunt inter parallelas intersegmenta.



2. Si duae datae rectae facientes angulum continuentur, prima aequaliter secundae, secunda infinite, parallela a terminis primae continuationis in principium secundae, & contingens in ea punctum interfecabunt tertiam proportionalem. 11 p 6.

Sunto data rectae facientes angulum ae & ai , & prima ae continuetur aequaliter ipsi ai , & ipsa

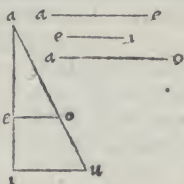


ai continuetur infinite, tum parallela ei & ou a terminis primae continuationis in i principium secundae, & u contingens punctum in secunda, secant in tertiam proportionalem. Nam per 13 e ut ae ad eo id est per fabricam ad ai , sic ai ad iu .

f 3 3. Sic da

3. Si è datis tribus rectis prima tertiaque facientes angulum continuentur, prima equaliter secunde, tertia infinite, parallela à terminis primæ continuationis in principium secunde & contingens in ex punctum interfecabunt quartam proportionalem. 12 p 6.

Sunto, da
te prima ae
secunda $e i$
tertia ao , to
tumque di
agramma
cõpleatur
ex præscr
pto. Hic
per 13 e, ut ae est ad ei , sic ao ad ou .



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. VI.
de triangulo.

Plana similia habent duplicatam rationem homologorum laterum, & unum proportionale medium. 20 p 6, 11 & 18 p 8.

Adhuc de lineis planis earumque affectionibus actum est: sequitur de figuris planis earumque generibus. Præponitur autem commune consectarium 15 e 4, quia dimensio duplex est in planis.

2. *Planum est rectilineum aut obliquilineum*

Rectitudinis vero & obliquitatis differentia linea fuit 4 e 2: unde nunc repetitur dichotomia plani è terminis rectis vel obliquis, & eadem caussa præponitur modo rectilineum, qua prius recta linea præposita est obliqua.

3. *Rectilineum est planum, quod comprehenditur à lineis rectis.*

Hinc est 9
& 20 d 1,
quod angulus planus rectilineus sit, qui comprehenditur à rectis lineis, quod figura rectilinea sit, quæ comprehenditur à lineis rectis, sed generale melius erit generaliter, ut in exemplis.



4. *Rectilineum æquat angulos rectis interiores quidem generatim à binario paribus, externos autem quaternis.*

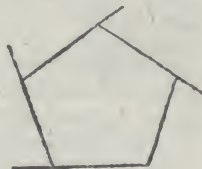
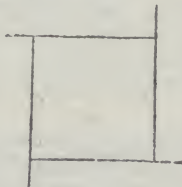
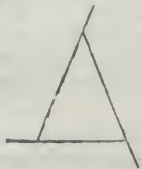
Primum

Primum nempe genus rectilinei, id est triangulum æquat interiores duobus rectis, id est binario, primo pari rectorum: secundum id est quadrangulum secundo pari id est quaternario, tertium quinquangulum tertio, id est senario rectorum, & quartum quarto, quintum quinto, & sic deinceps rectilinei genera paribus rectorum ita respondēt ut vides in hac arithmetica progressione parium

2. 4. 6. 8. 10. 12

3. 4. 5. 6. 7. 8

Externi tamen quolibet latere continuo, rectorum quaternario semper æquan-



tur. Itaque geometria hæc singularis est & mysterii cuiusdā plena, jam olim sacrata in scholis geometrarum. Proclus enim secundā partē de externis rectorum quatuor æquantibus, sic affirmat 11 cap 1 lib. Quomodo (ait) etiam quatuor rectorum æquales externos habere angulos, non triangulis modo, sed omnibus rectilineis inest. Item cap 7 lib 2. Quadam mutuo confirmantur. Nam & ex eo quod externi rectilineorum anguli quatuor sunt rectis æquales: interiorum rectorum æqualium multitudo, & contra hoc ex illo demonstratur. Hæc ille. Ut autem ab externis probetur interiorum ratio, si Proclus ipse demonstrasset, hoc illi beneficium deberetur: ab interioribus vero per genera probatur de externis. Nam trianguli tres anguli æquantur duobus rectis, quadranguli quatuor, quinquanguli sex, sexanguli octo, septanguli decem, atque ita deinceps à binario paribus, unde per 1 c 8 & 5 perpetuus exteriorum quaternarius concluditur.

5. Rectilineum est triangulum aut triangulatum.

Ut à linea lineatum, sic à triangulo triangulatum dicatur.

6. Triangulum est quod comprehenditur à tribus lineis rectis. 21 d r.

Ut aei. Triangula figura definitur ab Euclide à tribus lateribus, unde & trilaterum tanquā ex causa melius appellaretur quā triangulum ex effectis: præsertim cum



tres anguli cum tribus lateribus nequaquam reciprocentur. Triangulum enim non potest esse quatuor laterum, ut *auriculæ* velut cuspidatum: Zenodorus id vocat.

id vocabat
 πριλογώνιον
 vangelum,
 & potest
 quinque &
 sex esse late-
 rum. ut hic.

Nomen igitur
 trilateri
 plenius & iustius esset, sed usus trianguli nomen accepit pro trilatero, & sane te-
 neatur eodem sensu.



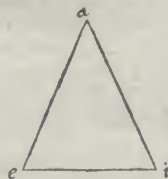
1. Triangulum est prima figura rectilineorum.

Euclides ax. 12 fecit, quod duæ rectæ superficiem non claudant: & Vitellio 4 postulato primi postulavit duabus superficiebus planis corpus non claudi: at negatio est ex opposito hujus elementi. trilaterum est prima figura rectilineorum: Ergo in figuris rectilineis nulla est bilatera, neque duæ rectæ figuram faciunt. Quid autem sit prima figura, patuit 7 e 4.

2. Si recta infinita secat angulum, secat basin. Vitell. 29 t 1.

7. Trianguli duo quælibet latera sunt majora reliquo.

Definitum est triangulum, sequitur ratio in lateribus & angulis trianguli. Prima ratio Euclides est 20 p 1 de ratione laterum. Esto igitur triangulum $a e i$: dico lateribus $a e$ & $e i$ brevius esse latus $a i$, quia per e 5 e 2 recta intra eosdem terminos est brevissima. Simillima propositio huic est 20 p 11, de qua erit in stereometria. Euclides hanc propositionem anxia hystorologia demonstrat, de qua in scholis. Itaque Epicureis materiam irridendi sui præbuit, ut ipsum cavillarentur, demonstrare quæ vel asinis manifesta essent.

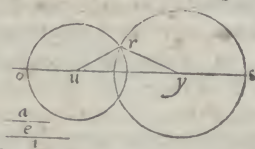


Esto enim (ajebat Sidonius Zeno) famelicus asinus in angulo a , pabulumque in opposito angulo e , asinus recta $a e$ protinus ad pabulum accurret, neque duo latera peragrabit. Natura si quidem agit in omnibus secundum breviores lineas, ut Vitellio 5 p 5 exemplo aranearum & canum demonstrat, & cap 5 lib. 1. Hylacenus idem prius dixerat de ponderibus deque luce, quæ non obliquis, sed rectis lineis feruntur: sed ante hos omnes Aristoteles & Euclides ipse idem senserant. Proclus tamen hic Euclidem defendit, tanquam scientificas rationes secutum, non sensum judicem, ut Epicureus. Tamen si Epicurea illa ratio non solum physica, sed geometriæ principiis etiam consentanea sit: rationem tamen judicem sequamur: ut è definitione lineæ rectæ, neque interea Euclides elenchum faciamus.

1. Si tres rectæ sint duæ quælibet majores reliqua, peripheriæ quæ à terminis unius intervallis reliquarum concurrant, radii à concursu ad alios terminos constituent triangulum.

Euclides

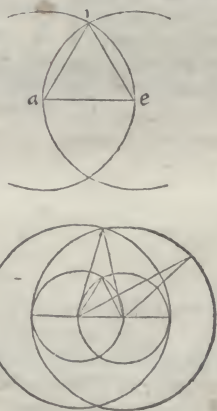
Euclidis est 22 p 1: ubi proponit constituere triangulum ex tribus rectis, quae sint tribus datis aequales, & duae quilibet secundum proximam trianguli legem majores reliqua. Problema igitur jubet aedificare triangulum quodcumque optaveris. Optetur igitur triangulum ex tribus rectis a, e, i , duabus quibusvis reliqua majoribus: & recta sit infinita, e qua tres secantur aequales datis ou, uy, ys , tum a terminis y & u , intervallis ou & ys peripheriae concurrent in puncto r , radii ab eo concursu ad terminos u & y constituent triangulum ury : radii enim illi aequabuntur rectis aequatis. per 3 c 5 & 5.



2. Si duae aequales peripheriae a terminis datae rectae ejusque intervallo concurrent, rectae a concursu ad dictos terminos constituent triangulum aequilaterum super datam. 1 p 1.

ut hic sunt

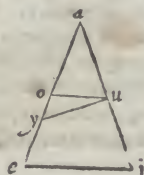
per a & e constituitur triangulum $a e i$, & similiter institui possit fabrica aequicruri e communis radio non aequae datae, & variis e tribus diversis radiis, quae omnia in eadem figura hic proposita sunt: at



specialia haec in generali problemate continentur, neque novam ullam geometriam interpretantur.

8. Si recta in triangulo est parallela basi, secat crura proportionaliter: contra. 2 p 6.

Ejusmodi igitur ratio est laterum in uno triangulo, sequitur proportio laterum: ut hic in triangulo $a e i$ esto ou parallela basi, & intelligatur in a vertice tertia parallela. Itaque per 13 c 5 intersegmenta sunt proportionalia. Contra verba cogitur ex antecedente, quia to-

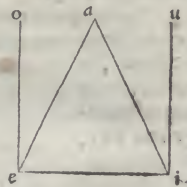


8 tum est

tum esset minus parte. Nam si parallela non sit ou , est yu , hic per thesin & antecedentem $40, 0e, 47, ye$ cum sint proportionales, & prima 40 sit minor quam tertia 47 , secunda $0e$ esset minor quarta ye , totum parte.

9. *Trianguli tres anguli sunt aequales duobus rectis* 32 p 1.

Hæc propositio locis infinitis Aristoteli proposita est, & videtur philosophus. propositionis hujus argumento apodicticam analysin commentus esse, sed de tam horribili commento (quo tot ingenia tot seculis decepta sint) est in scholis & logicis & geometricis. Explicata igitur est hæcenus, comparatio in trianguli lateribus, explicatur deinceps ratio in angulis, qui simul æquantur duobus rectis. Veritas autem hujus propositionis (ait Proclus) secundum communes notitias apparet duobus perpendicularis ad basin erectis: quantum enim inclinationis nutu imminuitur ex angulis rectis ad basin, tantum assumitur ad verticem, duorumque rectorum æqualitas ista compensatione cōstruitur: at hic in triangulo aei , si perpendiculares oe & ui sensim inclines ad a , percipies in tertio angulo, a tantum assumi, quantum detrahitur de angulis e & i . Sic Aristoteles 9 cap 2 Phys. repetit causam theorematis hujus ex angulo recto: concludi tamen etiam potest: ut in



triangulo aei sit per 3, c 12 & 5 parallela ou contra ie .

Hic tres particulares anguli iao, iae, eao æquantur duobus rectis per 1 c 8 & 5: sed tribus illis interiores æquantur:



primo ea sibi ipsi, tum reliqui alternis, per 12 & 5. Aristoteles 9 Philoso. quaeritur cur duo recti in triangulo, respondet quod ad unum punctum anguli sunt æquales duobus rectis, quæ Euclidis demonstratio est, de qua in scholis. Itaque

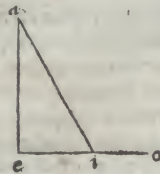
1. *Trianguli duo quilibet anguli sunt minores duobus rectis.*

Nam si tres æquales sunt, duo sunt minores. Euclides fecit 17 p 1, quæ conclusæ loco hic assumitur.

Et

2. *Continuato latere, exterior angulus æquatur duobus interioribus oppositis.*

Hæc ratio est interiorum angulorum in uno triangulo: sequitur ratio exterioris cum interioribus oppositis, ut in aei triangulo continuetur latus ei in o , duo deinceps aio , & aie ; per 1 c 8 & 5 æquantur duobus rectis, quibus æquantur interiores: tollatur communis aie , exterior reliquetur æqualis reliquis interioribus & oppositis



positis

positis. Euclides fecit partem 32 p 1.

3. Est maior utrobet interiore opposito.

Euclides etiam hoc proposuit 16 p 1. at pari lucro assumitur.

10. Si triangulum est æquicrurum, est in basi æquiangulum: & contra. 5 & 6 p 1.

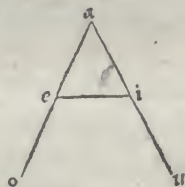
Sic Euclides trianguli affectionem complectitur nomen isosceles æquicruri, sive triangulum sit æquilaterum sive æquicrurum tantum. Antecedens patet per 16 c 3. Conversa patet per impossibile. Nam si crur alterum majus esset, ut ae , amputetur per 2 c 5 & 5 æquale oe , & connectatur oi , tum per 16 c 3 basis oi æquaretur basi ae : at basis oi minor est. Nam per 7 c 1 & 10 (quibus æquatur ae cum oe) ponatur æqualis ipsi ai , & ao sit communis, majores sunt ipsi oi . Itaque eadem oi esset æqualis ipsi ae , & minor eadem. Thaletis Milefii hoc inventum est.



Uaque

1. Si trianguli æquicrura continentur, anguli sub basim æquabuntur.

Anguli enim aei & ieo , item aie & ein bini æquatur duobus rectis, per 16 c 5.

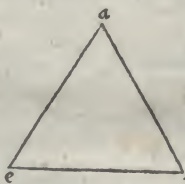


Itaque etiam inter se: detractis igitur interioribus æqualibus exteriores æquales relinquentur. Euclides fecit partem 5 p 1.

Et

2. Si triangulum est æquilaterum est æquiangulum: & contra.

Confectari um est & trianguli æquicruri lege de duobus & cruribus & angulis, ut in exemplo aei demonstrabitur.



Et

3. Angulus trianguli æquilateri valet duas tertias recti.

Nam cum 3 anguli æquales æquantur 2 rectis, 1 æquabitur $\frac{2}{3}$. Est 23 p 1 Regio.

Et

4. Triangula sex æquilatera complent locum.

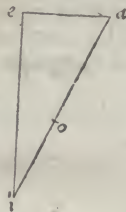
g 2 Uthic

ut hic. Nā
sexies $\frac{2}{3}$ re
cti, sunt $\frac{1}{3}$
recti, id est
quatuor
recti: At
quatuor
rectis cō
pletur planus locus, per 16 e 4 ut hic.



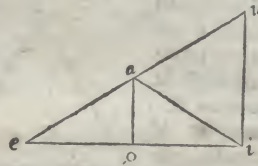
II. Trianguli majus latus subtendit majorem angulum, & major angulus subtenditur a majore latere. 19 & 18 p 1.

ut hic $a i$ majus esto latus quam $a e$, major erit angulus $a d e$ quam $a d i$. Secetur enim ex $a i$ æqualis ipsi $a e$, sit $q u e i o$, tum angulus $a e i$ æquicrurus angulo $o i e$ major erit basi per thelin, ideoque major per 3 c 6 e 3. Conversa patet eadem figura: ut $a e i$ angulus sit major angulo $a i e$. Itaque per idem 3 c 6 e 3 major est basi. Quæ enim de angulis generaliter illic proponuntur, huc specialiter assumuntur de angulis in triangulo.



12. Si recta in triangulo bifecat angulum, secat basin ratione crurum: & contra. 3 p 6.

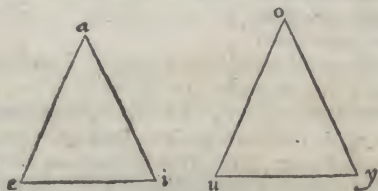
Supereſt miſta proportio de lateribus & angulis. Eſto triangulum $a e i$, & bifecetur sit angulus $e a i$ per rectam $a o$, dico ut $e a$ est ad $a i$, ſic $e a$ eſt ad $o i$: erigatur enim parallela $i n$ per 3 c 12 e 5 contra $o a$, & continuetur a infinite, ſecabit ipſam $i n$, per $e n$ e 5: ſecetur igitur in u . Hic per 13 e 5, ut $e a$ ad $a u$, ſic $e o$ ad $o i$. At $a u$ æquatur ipſi $a i$ per 10 e. Nam angulus $u i a$ æquatur angulo alterno $o a i$ per 12 e 5, & per theſin angulo æquali $o a e$, & per 12 e 5 æquatur interiori angulo $a u i$, & per concluſum æquali $u i a$. Itaque per 10 e, $a u$ & $a i$ æquantur. Ergo ut $e a$ ad $a i$, ſic $e o$ ad $o i$. Converſa ſimiliter demonſtratur in eadem figura. Nam ut $e a$ ad $a i$, ſic $e o$ ad $o i$, & ſic $e a$ ad $a u$, per 3 e. Itaque æquantur $a i$ & $a u$, item anguli $e a o$ & $o a i$ æquantur angulis $a d u$ & i per 12 e 5, æqualibus inter ſe per 10 e.



P. R A M I

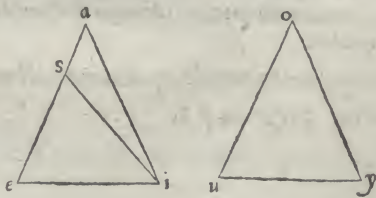
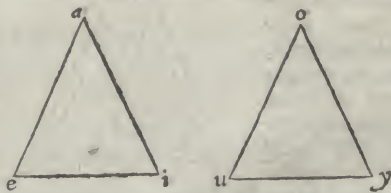
Triangula aequilatera sunt equiangula. 8 p1.

Atque haec de geometria unius trianguli, sequitur triangulorum duorum inter se comparatio, primum ratio est lateribus & angulis: unde triangula inter se dicuntur aequilatera & equiangula. Primo ex aequalitate laterum, aequalitas ducitur & angulorum. Triangula igitur hic conjunctim aequilatera dicuntur, quorum latera singillatim equalia sint, primum primo, secundum secundo, tertium tertio, etiam si singula triangula separata sint in aequilatera. aequales igitur angulos ostendit aequalitas laterum, per 1 c 6 e 3, ut hic.



2. Si duo triangula aequantur angulis vel duobus equicruris vel binis equalis aut cruris aut basis duorum, sunt aequilatera. 4 & 26 p1.

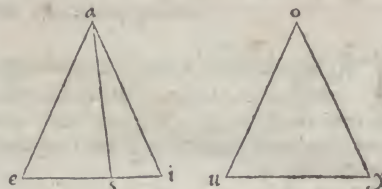
Prima pars patet sic. Sunt triangula aei, ouy: quia anguli ad a & o aequales sunt aequicruris, aequantur basi per 1 c 6 e 3. Secunda sic. Sunt triangula aei & ouy aequa binis angulis ad e & i, ad u & y, & aequantur crure ei & uy: dico aequilatera esse. Nam si latus ae (exempli causa) sit majus latere ou, amputetur aequale es, & connectatur is. Hic per antecedentem triangula aei, & ouy aequiangula erunt, & angulus sic aequabitur angulo ouu, cui totus aie aequatus est ex thesi. Itaque equarentur totum & pars. Quare latus ae non est inaequale, sed aequale, & per antecedentem partem



g 3 triangula

triangula $a e i$ & $o u y$ æquicrura æquantur angulo crurum, itaque & basi $a i$ & $o y$.

Tertia pars sic cogitur, ut in triangulis $a e i$ & $o u y$ sint anguli ad e & i ad u & y æquales, ut prius, & basis $a e$ anguli ad i æqualis basi $o u$, anguli ad y : dico æquilatera esse. Nam si latus $e i$ sit majus latere $u y$, amputetur æqualis $e s$, & connectatur $a s$. Itaque per antecedentem duo triangula $a e s$ & $o u y$ æqua angulo crurū



æqualium sunt æquiangula, & angulus $a s e$ æquatur angulo $o y u$ æquantur per thesin angulum $a i e$. Itaque $a s e$ æquatur $a i e$ exteriori interiori, contra $2 c 9 e 5$. Ergo basis $e i$ non est inæqualis ipsi $u y$, sed æqualis. Itaque ut prius duo triangula $a e i$ & $o u y$ æqua angulo crurum æqualium sunt æquilatera. Hic notabis ex æqualitate binorum angulorum, & duorum laterum æquilatera triangula fieri: neque satis esse angulos duos æquales æquare basi, ut æqualitas crurum concludatur. De hoc enim elencho monuimus $2 c 6 e 3$. Quod si binos æques angulos non ad crura æquale, accidet triangulum multo majus, minori tamen æquale esse, quod apud Proclum Porphyrius diserte & accurate exposuit: de quo erit in scholis.

3. Triangula æquantur ternis angulis.

Quia tres anguli in quolibet æquatur duobus rectis: Ut hic maximum triangulum angulis simul acceptis est æquale minimo, neque tamen æquiangulum propterea existimatur: æquiangula enim triangula sunt, cum singuli anguli æquantur singulis: non autem universi universis.



Itaque

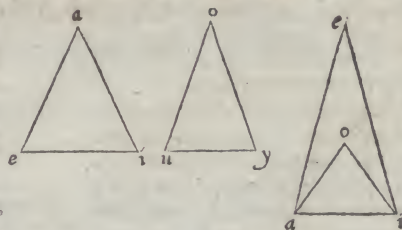
Si bini anguli duorum triangulorum æquantur, reliqui æquantur.

Terni nempe æquantur inter se: ideoque si ab æqualibus tollas æquales, reliquentur æquales.

4. Si triangulum triangulo æquicrurum est majus basi, est majus angulo: & contra. 25 & $24 p 1$.

Adhuc

Adhuc ratio
fuit æqualitatis
in lateribus &
angulis trian-
gulorum, sequi-
tur ratio inæ-
qualitatis af-
sumpta è com-
muni & genera-
li inæqualitate



angulorum. Primum est 3 c 6 e 3. Ut vides in aei & ouy.

5. Si triangulum triangulo in eadem basi est minus interioribus cruris
bus, est majus angulo crurum.

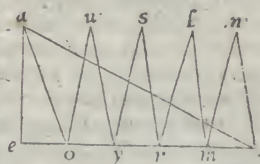
Hoc item est 4 c 6 e 3, Euclidi est 21 p 1 de triangulo in eadem basi per tri-
angulum majus comprehenso, & tamen sine conversâ: ut e o i interius in eadem
basi minus cruribus, quam aei.

6. Triangula æquealta sunt ut bases. è 1 p 6.

Ergo hæc triangulorum ratio est, sequitur proportio triangulorum, primum
de recta cum basibus. Confectarium est 12 e 4.

1. Inæquali basi sunt æqualia.

Id confectarium fuit genera-
le 12 e 4, unde etiam conclusit
Archimedes 7 theo. 1 de sphæ.
Si triangulum triangulis æque-
altum habet basim basibus æ-
qualem, æquatur universis: ut
hic vides aei equari triangulis
a eo, uoy, syr, lrm, nmi. Hinc etiam concludes triangula æquilatera esse æqua-
lia, quia æquealta sunt inæquali basi, quod Euclides 4 p 1 conclusit per 12 e 4.
Et



2. Si recta à vertice trianguli bifecat basin, bifecat triangulum, & diameter est trianguli.

ut hic vides. Biseg-
menta enim sunt tri-
angula æquealta, nē-
pe communis verti-
cis intra easdem pa-
rallelas, & in basibus

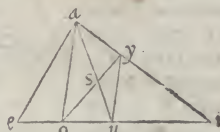


æqualibus. Ergo æqualia & recta illa erit diameter per 5 e 4, quia est per
centrum.

7. Si recta

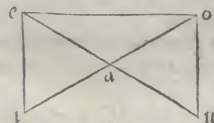
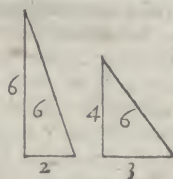
7. Si recta est a vertice trianguli ad datum in basi punctum non medium, & parallela sit a medio basis in latus, recta a vertice parallela in dictum punctum bisecabit triangulum.

Esio triangulum aei , & ao secet basin ei in o inaequaliter, & uy sit parallela ab u medio basis in latus ai , dico rectam yo bisectricem esse trianguli: conectatur enim au , ea bisecabit per 2 c 7 e. Jam triangula ayu & you æquantur, quia æquealta in eadem basi: commune tollatur ysu , relinquentur æqualia asy & osu , commune rectilineum y sui addatur utrique æqualium, tum oyi æquabitur dimidio au : Itaque & reliquum rectilineum $aeoy$ dimidium erit. Jordani est 21 p 1, ubi sunt 22 & 23 p, de dato puncto intra & extra triangulum, quæ geometria si ab aliquo sine mendis ederetur, permagna esset utilitas quidlibet figura triangula comprehensum in dato puncto bisecandi, ut plerumque est inter cohæredes puteus, fons, arbor, & similia.



8. Si triangula æquiangula reciprocantur cruribus æqualis anguli, sunt æqualia: & contra. 15 p 6.

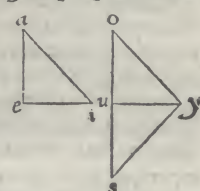
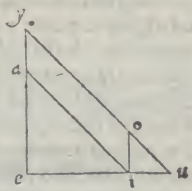
Proportio directa in triangulis ea est, reciproca sequitur. Consecrarium est 13 c 4, quod manifestum est, quoties æqualis angulus rectus est: tum enim crura ista æquales sunt altitudines & bases: Ut hic vides separatis triangulis. In triangulis autem obliquangulis licet crura non sint altitudines, veritatis tamen causa eadem est: si quis tamen demonstrationem requirat, ea sic est. Esio igitur diagramma in triangulis aei , aoi , & anguli oau & eai æquales, sitque ut ua ad ae , sic ia ad ao : dico triangula aoi , & eai æquari. Nam ua ad ao ad oe est ut ua ad ae per 6 e, & ia ad ao per thesin, est ut e ad ao . Itaque ua & e ad ao sunt proportionalia, ideoque æqualia sunt inter se. Conversa eodem sorte, sed retrogrado concluditur. Nam ua ad ae est ut ua ad ao ad oe per 6 e, & ut e ad ao per thesin, quia æqualia, & ut ia ad ao per idem. Quare ua est ad ae , sicut ia ad ao .



9. Si duo triangula sunt æquiangula, sunt proportionalia cruribus: & contra. 4, 5 p 6.

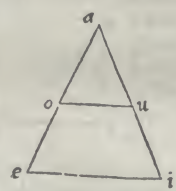
Comparatio & rationis & proportionis triangularis antecessit, restat extrema similitudo triangulorum, quæ constat illa quidem ratione angulorum & proportio

proportione crurum. Itaque merito angulorum ratio præponitur, unde crurum non ratio, sed proportio posterior colligitur. Sumto igitur triangula aei & iou æquiangula, & ad eandem rectam eu communi puncto i comparata: oi & ae cum anguli ad i & e ponantur æquales, erunt parallela per 12 & 5. Itaque per 1 c 12 & 5 uo & ea continuata concurrent. Idem recta ai & yu sunt per 12 & 5 parallele, quia angulus ai æquatur interiori opposito oui . Itaque cum ai sit parallela basi yu , per 12 & 5 erit ea ad ay , id est per 5 c 12 & 5 ad io ut ei ad iu , & alterne ea ad ei ut io ad iu . Hæc prima est proportio. Item cum oi sit parallela basi, erit yo , id est per 5 c 12 & 5 ai ad ou ut ei ad iu , & alterne ai ad ie , ut ou ad ui . Hæc secunda est proportio. Denique æqueordinate ae est ad ai , ut oi ad ou . Quare si triangula sunt æquiangula, sunt proportionalia cruribus. Conversa sic patet. Sunt triangula proportionalia cruribus aei , ouy , & ut ae est ad ei , sic esto ou ad uy , & ut ai est ad ie , sic esto oy ad yu . Tum ad puncta u & y æquantur per 5 c 6 & 3 anguli angulis ad e & i , & fiat triangulum uys , reliqui anguli ad a & s æquabuntur per c 3 e, & triangulo yus erit æquiangulum datum aei , & per antecedentem cruribus proportionale: ita duo triangula ouy ex thesi, & uys ex fabrica sunt cruribus proportionalia eidem aei , & ut ae ad ei , sic ou ad uy , sic u ad uy . Itaque cum ou & su ad idem uy sint proportionalia, æquantur: item ut ai ad ie , sic oy ad yu , sic item sy ad yu . Itaque oy ad sy cum sint proportionalia ad yu , æquantur: yu commune latus est. Triangulum igitur ouy triangulo syu est æquilaterum: & per 1 æquiangulum, ideoque æquiangulum triangulo aei : quod erat propositum. Generaliter autem prædictum est 1 c 14 e 4 de lateribus homologis subtendentibus æquales angulos.



Si recta in triangulo est parallela basi, defecat triangulum æquiangulum toti, & minus

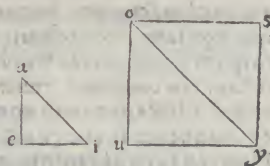
Utin aei triangulo ou defecat triangulum aei ou , per 12 & 5 æquiangulum toti, & minus basi, ut patet per 9 c, & per alternationem laterum.



10. Si duo triangula sunt proportionalia cruribus æqualis anguli, sunt æquiangula. 6 p 6.

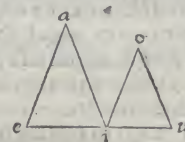
h Sinto

Sunto igitur proposita triangu-
la aei & ouy qua angulo ad a & o , & cruribus ea ad ai sicut uo
ad oy , & per 5 & 6 & 3 aequentur anguli soy & oys
angulis eai & eia , reliqui ad s & e per c & 3 e aqua-
buntur: Hic vides aei triangulum aequiangulum
esse oys . Jam per 9 e, ut ea ad ai , sic o ad oy , ide-
oque per thesin, sic uo ad oy . Itaque cum uo & os
sint proportionalia ad oy aequantur. Denique si commune addatur oy , aequan-
tur crura ou & oy cruribus so & oy , & per c & 3 e reliqui anguli. Quare secundum
triangulum tertio similiter aequiangulum erit: ideoque si triangu-
la proportionalia cruribus aequantur angulo crurum, sunt aequiangula.



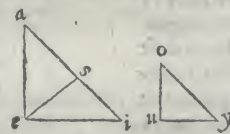
II. Si cruribus proportionalia & alterne parallela intermedium angu-
lum faciunt, bases habent in rectam continuas. 32 p 6.

Causa est e & c & 5 . Nam duos utrinque facient cum incidente ai duobus re-
ctis aequales. Sunt triangu-
la aei & oiu proporti-
onalia cruribus, ut ea ad ai , sic io ad ou , & ea sit pa-
rallelum ipsi io & ai ipsi ou , item faciat intermedium
angulum aio , nempe intermediis cruribus ai & oi .
Dico bases ei & iu continuari in rectam. Cum enim
sint parallelae ex thesi ae & oi , recta ai faciet per 12
& 5 angulos ad a & o aequales alterno aio . Ideoque
aequales inter se: tumque per 10 e data triangu-
la sunt aequiangula. Itaque an-
gulus oiu aequatur angulo aei . Tres igitur anguli oiu , oia , aie per 3 e aequantur
tribus angulis trianguli aei aequantur. per 9 e & 6 duos rectos, ideoque & ipsi duo-
bus rectis aequantur. Quare per 1 & c & 5 ei & iu in rectam continuantur. Haec pro-
positio adhibetur 17 p 13, & 29 p 1. Apollonii.



12. Si habeant unum angulum aequalem, alterum cruribus proportio-
nalcm, tertium homogeneum, sunt aequiangula. 7 p 6.

Sunto proposita triangu-
la aequa angulo ad a & o , & proportionalia cruribus
angulorum ad e & u , & reliquo angulo ad i & y homo-
genea, id est ut ambo anguli sint vel acuti, vel obtusi,
vel recti, sed primo acuti. Dico reliquos ad e & u aequa-
ri: secus per 5 & 6 & 3 aequetur aes ipsi ouy , habebis
per 1 & c & 3 e aequiangula, & angulus ase aequabitur an-
gulo oyu , acutusque est uterque, ac per 9 e aes , ouy
ateribus proportionalia: atque ut ae ad es , sic ou ad uy id est per thesim, sic ae ad
 ei . Itaque quia eadem ea ad duas es & ei habet eandem rationem, aequantur e
& ei , & ideo per 10 e & 6 anguli ad basim ins s & i aequantur. Acutus igitur uter-
que, acutus item & ase contra 1 & c & 5 . Idem vero prorsus accidet utroque reli-
quo vel obtuso, vel recto. Pars autem ultima de recto patet per c & 3 e.



P. R A M I

Triangulum est rectangulum vel obliquangulum.

Partitio trianguli sequitur ex angulis communibus differentiis: sed hic specialis primum, & maximi momenti, ut erit in quadrangulis & prismatis.

2. Triangulum rectangulum est quod habet unicum angulum: obliquangulum quod nullum. 27 d. 1.

Rectangulum triangulum in geometria præcipuas vires habet, & à præstantibus mathematicis non immerito magister matheseos appellatur. Itaque

1. Si duæ perpendiculares connectantur, constituent triangulum rectangulum.

ut in aei.

Hæc fabri

ca rectan-

guli duci-

tur è defi-

nitione re-

cti anguli.

Perpendi-

culares e-

nim rectæ recti anguli sunt artifices, ut patet 8 e 3.

2. Si trianguli angulus ad basin rectus est, perpendicularis à vertice est crux alicrum.

Ut in eodem exemplo.

3. Si triangulum rectangulum est æquicrurum, uterque angulus ad basin est dimidius recti: & contra.

ut in

aei: æ-

quan-

tur e-

nim

ambo

uni re-

cto

per 9

e 6, & inter se per 10 e 6.

1. Si trianguli angulus æquatur reliquis, est rectus.

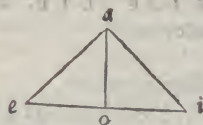
Quia æqualis dimidio duorum rectorum. Confectarium est Euclidis ad

31 p 3.

2. Si recta à vertice trianguli bifecans basin est æqualis bisegmento, angulus verticis rectus est.

h 2 Ut in aei

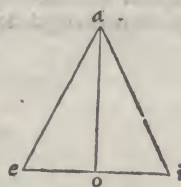
Ut in aei
recta ao bi
secans e i
basin in o
equalis sit
ipfi eo di-



midio basis, facit triangula α quicrura, & particulares v \acute{e} rticis angulos α qua-
les extremis $ad e$ & i per 10 e 6. Est Jordani : p. Itaque verticis angulus α quatur
reliquis. Ideoque per 1 c rectus.

4. Perpendicularis in triangulo ab angulo recto in basim secat trian-
gula similia toti & inter se. 8 p 6.

Ut in triangulo a
 ei perpendicularis ao
secat triangula ao
 e & aoi similia toti,
quia ipsi α quiangu-
la: cum rectus utrin-
que sit unus & alter
communis in i & e .



Reliquus igitur α -

quatur reliquo, per 3 e 7. Itaque particularia triangula sunt α quiangu-
la toti, proportionaliaque cruribus α qualium angulorum, per 9 e 7: similia vero inter
se triangula esse patet per 3 c 14 e 4.

Itaque.

1. Perpendicularis est proportionalis inter segmenta basis.

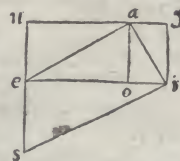
Ut io ad oa , sic oa ad oe , quia α qualium angulorum crura sunt proportiona-
lia per 4 e. Hinc Platonis mesographus inventus, de quo in scholis. Et

2. Crus utrumlibet est proportionale inter basim & basis segmentum conterminum.

Ut enim e i ad ia in toto triangulo, sic a i ad io in majore. Sic enim homologa
sunt latera, quae subtendunt α quales angulos per 1 c 14 e 4: item ut ie ad ea
in toto triangulo, sic ae ad eo in minore.

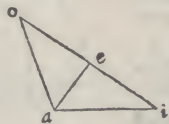
5. Si basis trianguli subtendit rectum, rectilineum ad eam situm α qua-
tur rectilineis ad crura similibus similiterque sitis: & contra. 63 p 6.

Sit triangulum rectangulum aei , & triangula ean , aiy ,
& iis simile similiterque situm per 4 c 14 e 4, sit triangu-
lum ies . Dico ipsum duobus illis α quari. Sit ab angulo
recto a perpendicularis ao , haec ostendet proportionales
bis ternas per 2 c 4 e, nempe ie , ea , eo , item ei , ia , io . Itaque
per 1 c 15 e 4, ut ie est ad eo , sic triangulum ies est ad tri-
angulum ean , & ut ei est ad oi , sic triangulum ies est ad
triangulum aiy : At ei α quatur eo & oi , suis nempe parti-
bus. Quare per secundam compositionem in arithme-



tica 9

tica 9 cap. 2 lib. triangulum eis æquatur triangulis ean & iaj . Euclides nominat hic eis & $ugla eis$ speciem & speciebus, id est figuram & figuris. Nos ad plana rectilinea accommodavimus. Causa dicitur in scholis. Conversa sic probatur. Sit triangulum aei & perpendicularis erigatur eo super ae æqualis ipsi ei , & connectatur oa . Hic per præcedentem sita ad oe & ea rectilinea, id est per fabricam ad ae & ie æquantur rectilineo ad ao simili & similiter sito, & ex thesi æquantur simili & similiter sito ad ai . Itaque ad oa & ai similia rectilinea cum sint æqualia, homologa latera habebunt æqualia, per 1 c 4 e 4, & triacula duo fient æquilatera, & per 1 e 7 æquilangua. Rectus autem est ex fabrica oea , cui æqualis concluditur aei . Itaque aei per 8 e 5 est rectus.



6. Triangulum obliquangulum est obtusangulum vel acutangulum.

Partitio est in specialibus differentiis anguli.

7. Obtusangulum quod habet unum obtusum angulum. 28 d 1.

Rectus unicus est in triangulo. Itaque & obtusus.

Itaque

1. Si obtusus angulus est ad basim, perpendicularis à vertice cadit extra.

Et

Ut hic in aei perpendicularis io , ut patet 2 c 2 e.

2. Si trianguli angulus sit major reliquis, est obtusus.

Et

ut patet 1 c 3 e.

3. Si recta à vertice trianguli bifecans basim, est minor bifegmento, angulus verticis obtusus est.

Ut

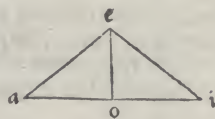
in ae

i sit e

o bi

secans

mi



nor, ut patet per 2 c 3 e.

8. Triangulum acutangulum est quod habet omnes acutos angulos. 29 d 1.

Itaque

1. Perpendicularis à vertice cadit intra.

Ut in aei perpendicularis ao , ut patet per 2 c 2 e.

2. Si trianguli angulus sit minor reliquis, est acutus.

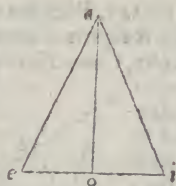
Ut patet per 1 c 3 e.

3. Si recta à vertice trianguli bifecans basim est major bifegmento, angulus verticis acutus est.

h 3

Ut in ae

ut
in ae
i sic
bise-
cans
a o
ma =
for
biseq



mento, angulus aei erit acutus, ut patet per 2 c 3 e.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. IX.
de Geodesia rectarum & triangulis rectangulis similibus

Triangulorum rectangulorum similium geometria, cum plerosque alios
usus habet, tum imprimis geodesiam linearum rectarum suppeditat, & magi-
sterium geometriae in triangulis rectangulis antea collocatum, tandem verum
magisterium hic esse deprehendetur. Continebit enim geodesiam rectarum,
posteaque geodesiam planorum & solidorum, & dimensionis lateribus, quae rectae
lineae sunt. Ad rectarum igitur geodesiam radius instrumentum omnium geo-
metricorum instrumentorum praestantissimum & commodissimum adhibetur.

1. Radius est norma crurum inaequalium.

Instrumentum perantiquum est, & vulgo baculus jacob dicitur, tanquam a
Sancto Patriarcha illo jam olim inventus sit. Archimedes in arenam numero si-
mile quidpiam notavit, & Hipparchus instrumento non absimili ausus est rem
etiam diis improbam, annumerare posteris stellas, & sidera velut ad normam
expangere, ait Plinius. Et sane radius non solum metiendis terris, sed astris lo-
co & ordine definiendis, omnibusque caelestis civitatis regionibus ac viis de-
scribendis praecipue usurpatur: & sic utrumque usum Virgilius eleganter ex-
pressit.

—ecquis fuit alter,
Descripsit radio totum, qui gentibus orbem?
—calique meatus.

Egl. 3
item
6 Ach.

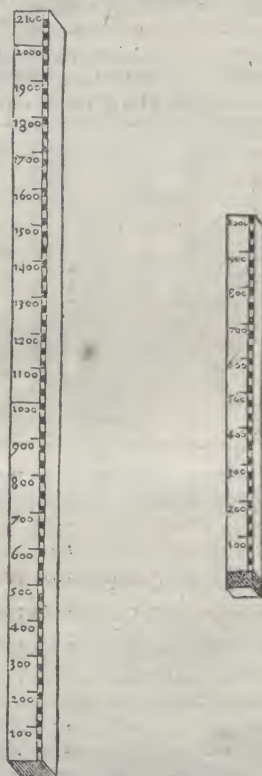
Describent radio & surgentia sidera dicent.

Arabes tandem, ut Rabi, Levi, sed proximis temporibus Germani im-
primis excoluerunt, Regiomontanus, Vernerus, Schonerus. Appianus maxime
omnium Gemma opere separato illustravit. Radius igitur suis & geometricis
partibus describatur: astronomica autem distributio in suum tempus reserve-
tur, tum usus adhibeatur dimensionibus linearum. Radius autem pro arbi-
trio mensuris parvus aut magnus est. Quantitas enim instrumenti aliter de-
finiri non potest.

2. Radii crura sunt index & transversarium.

3. Index

3. Index est duplus sesquidecimus transversarii,
ut hic.



4. Transversarium est per indicem volubile modo sublimius, modo humilior.

Hæc ratio in definiendis & componendis radii cruribus perpetua est: ut si transversarium sit 10 partium, index sit 21. Transversarium itaque sit 2000 partium, index erit 4200: & quia index sustinere debeat, transversarium sustineri, index esto crassior, transversarium tenuius. Verum è qua materia sit radii pars utraque ænea, lignea nihil interest, modo firma sit & stabilis: transversarium tamen

tamen commodius æneis fistulis volvetur, & per indicem & per se sursum deorsumve ad rectos ita contiguus, ut ore alterno latus alterius contingatur: tertia fistula sit volubilis per totum transversarium, quæque ideo cursor appellatur: quarta & quinta fistulæ transversarium fixæ & immobiles terminent ad tertiam & secundam æquealtæ pinnis, ad opticam lineam, ubi opus erit disternendum, & tanquam certis in transversario punctis definiendum. Tres primæ fistulæ cochleis sistentur, ubi res exiger. His igitur fistulis transversarium tan-

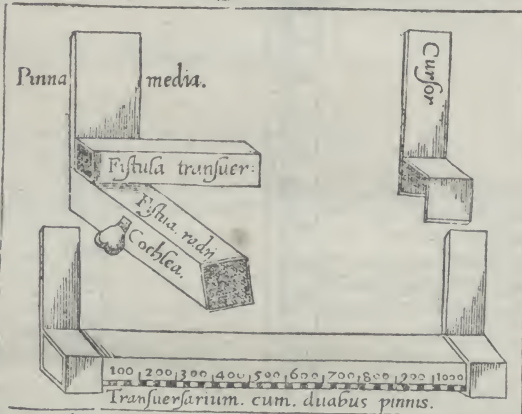
tum efficitur, quanto opus fuerit, ut hic vides. fabrica radii dicta est, usus sequitur, ad quem communiter attinet primo iustam esse distantiam: nec enim visus est infinitus: alterum obductum oculum: vis enim optica è duobus oculis in unum conductâ firmius collimat, & radius ad os genæ commodius applicatur: Hic enim oculus est tanquam centrum circuli, cui inscriptum sit transversarium: manus quieta: nam si trepident, geodesiæ proportio turbabitur. Item stationis locus à medio pedis.

5. Si visus est ab initio cruris alterius, est per terminum reliqui, crusque alterum est rectum metiendæ magnitudini, reliquum parallelum.

Hæc communia præponuntur, quod visus sit ab initio indicis per terminum transversarii, vel contra ab initio transversarii per terminos indicis: quodque index sit rectus metiendæ lineæ transversarium parallelum, vel contra. Perpendicularum vero indicis plumbo suspensum probari potest in longitudine: in altitudine aut & latitudine fides oculis adhibenda est, tametsi modicus deflexus perpendiculari sensilè errorem adferre non potest. Terminum vero transversarii intellige, qui lineæ visus efficitur, sive extrema pinna, sive quocumq; alio loco cursor.

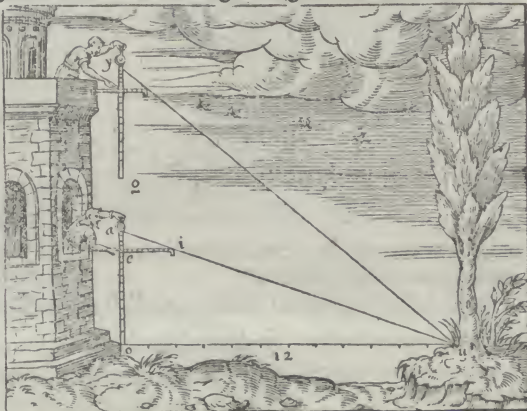
6. Longitudo & altitudo triplicem mensuram habent, primam & secundam unius distantie, & quidem data alterius dimensione pro tertio proportionali, tertiam duplicis distantie, qualis tantum est dimensio latitudinis.

7. Si vi-



7. Si visus sit ab initio indicis recti in metam longitudinis, erit ut segmentum indicis ad segmentum transversarii, sic mensuris altitudo ad longitudinem.

Theorema est Euclidis in opticis, quod & ideo libentius assumpsimus, ut planum fieret, hunc etiam geometricum usum geometriae doctori nequaquam alienum geometricae dignitatis visum esse. Sit igitur segmentum indicis a vertice nempe ad transversarium, 6 partium, segmentum transversarii ab indice nempe ad opticam lineam, 18. Index qualis hic esto mensuris altitudo quatuor pedum, longitudo erit 12 pedum. figura sic est: ut enim a eade i, sic a o ad o u, ut patet per 9 e 7. Sūt enim triangula similia. Nam a e i & a o u recti, & quia a e communis: reliquus igitur aequatur reliquo per c 3 e 7. Idem erit metiendi modus ex altiore loco, ut ex y, segmentum indicis 5 partium, tumque sit altitudo 10 pedum, transversarium 6: Neque vero quidquam interest, utrum longitudo sit in subiecto plano, an in ascensu descendu montis, ut in subiecta figura. Hoc modo poteris metiri latitudines fluminū, vallium, fossarum. Longitudo enim semper est hoc modo, ut in mari distantiam navium liceat metiri,



per c 3 e 7. Idem erit metiendi modus ex altiore loco, ut ex y, segmentum indicis 5 partium, tumque sit altitudo 10 pedum, transversarium 6: Neque vero quidquam interest, utrum longitudo sit in subiecto plano, an in ascensu descendu montis, ut in subiecta figura. Hoc modo poteris metiri latitudines fluminū, vallium, fossarum. Longitudo enim semper est hoc modo, ut in mari distantiam navium liceat metiri,



i quomodo

quō
& Tha/
les Mile/
sius a=
pud Pro/
clum 26
p i meti/
tur. Exē=
plū hic
habet.
Dein=
ceps in
dimensi/
one lon/
gitudi/
nis & al/
titudinis.



visus est in metam altitudinis. Quod prædico ne frustra sapius iteretur. Longitudinis secunda dimensio sic est.

8. Si visus sit ab initio indicis paralleli, erit ut segmentum transversarii ad segmentum indicis, sic data altitudo ad longitudinem.

Ut si segmentum transversarii sit 120 partium, data altitudo 400 pedum;

segmentum indicis 210 partium: Longitudo per auream regulam erit 700 pedum. figura sic est, ut demonstratio par superioribus, vel etiam facilior. Triangula enim sunt æquiangula, ut prius. Ut igitur o u ad i a, sic e i ad i a. Hæc dimensio est prima secundaque

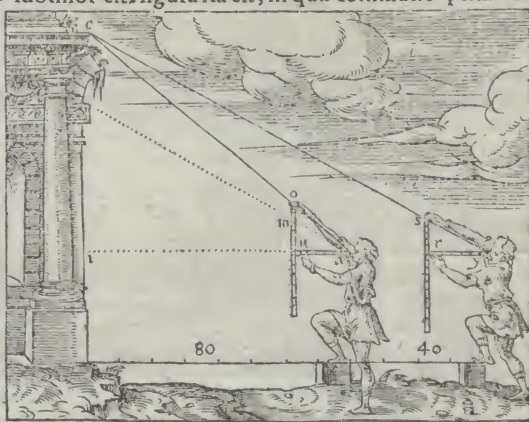


longitudinis per simplicem distantiam, tertia superest per duplicem, ubi transversarium si recedenti copia sit major, deprimetur in secunda distantia.

9. Si visus

9. Si visus sit ab initio transversarii paralleli, erit ut in indice differentia majoris segmenti ad minus, sic differentia secunda distantia ad longitudinem.

Hæc geodesia paulo subtilior est. figura ita est, in qua collimatio prima sit ab a initio transversarii & è qua sita longitudine at per o terminum indicis in e metam altitudinis: & segmentum indicis sit o u. Secunda collimatio sit ab y initio transversarii è distantia majoris per s terminum indicis in eandem metam, & segmentum indicis sit s r: Hic peracta dimensio est sumpta differentia ipsius o u supra s r. Demonstrati onis ergo cætera effin



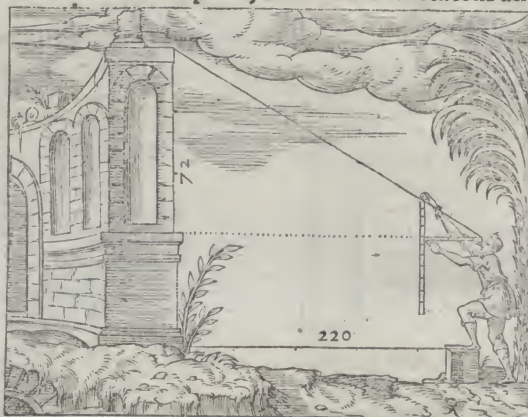
guntur. Parallela igitur contra ye in prima distantia ab initio transversarii sit a m l. Hic primum mu æquatur ipsi s r. Nam m u a & s r y triangula æquantur crure u a & r y per thesin (quia transversarium eodem suo loco manet) & anguli ad i psum m u a, u a m æquantur angulis s r y & r y s, quia illi recti, hi exterior & interi or oppositi. Itaque per 2 e 7 sunt æquilatera, & o m est differentia segmentorum indicis. Deinde ut o m est ad m u, sic e l ad l i, ut æquatio ternorum graduum ostendit. Nam per 9 e 7 ut o m ad m a, sic e l ad l a, & ut m a ad m u, sic l a ad l i. Itaque ex æquo, ut o m ad m u, sic e l ad l i, & per 8 e 6 sic y a ad a i: ut si differentia primi segmenti sit 36 partium, secundum segmentum sit 72, differentia secundæ distantie 40 pedum, qua sita longitudo erit 80 pedum. Atque hic altitudo nulla definite datur, ut faciat ullum principis proportionis terminum: Altitudo tamen licet dimensionis ignota est qua sita longitudinis terminus: ideoque adsummento ad ratiocinationem quaestionis, quia perpendiculariter insistens extremæ longitudini intelligitur. Tertia igitur ista longitudinis geodesia saepe est necessitatis, cū superiore neutro modo longitudo capi possit, interjecto quippe vel muri vel arboris vel montis impedimēto, ut meta longitudinis videri nequeat, qui primus modus est, neque altitudo contermina extremæ longitudini data sit, qui secundus est modus. Adhuc dimensio fuit longitudinis triplex prima & secunda è data altitudine, tertia è distantia duplici: sequitur altitudinis dimensio item similis triplex, & altitudo est perpendicularis à vertice magnitudinis ad solum mensuris, quomodo definita est altitudo 6 e 4. Prima geodesia altitudinis sic est.

i 2 IO, Si

10. Si visus sit ab initio transversarii recti, erit ut segmentum transversarii ad segmentum indicis, sic data longitudo ad altitudinem.

Deducitur e 18 th. 2 Euclidis in opticis, ubi Euclides umbra solis utitur pro

radio optico, qui nunc adhibetur: & hinc alio exemplo docuit Euclides geometriae usum nequam sibi sortidum vel ingratum esse. Sit igitur segmentum transversarii 60 partium, segmentum indicis 36, longitudo pedum 20, altitudo erit per auream regulam 72 pedum. figura sic est, & demonstratur per 9 e 7 ut prius: sed additur mensoris altitudo, quæ si sit quatuor pedum, altitudo tota erit 76.



Itaque in eversa altitudine. Si visus sit ab initio indicis paralleli, erit ut segmentum transversarii ad segmentum indicis, sic data longitudo ad altitudinem.

Est conclusa nempe altitudine subductio quod supereminet, relinquetur altitudo putei. Theorema est 20 in Euclidis opticis, id est tertium testimoniū de geometriae usu geometris nec illiberali nec ingrato, nempe de dimensione putei, rupis, turris. Itaque segmentum transversarii est 5 partium, segmentum indicis est 13, diameter putei (quæ modo est pro longitudine) 10 pedum, quæ sumperne sumatur pro æquali in fundo, oppo-

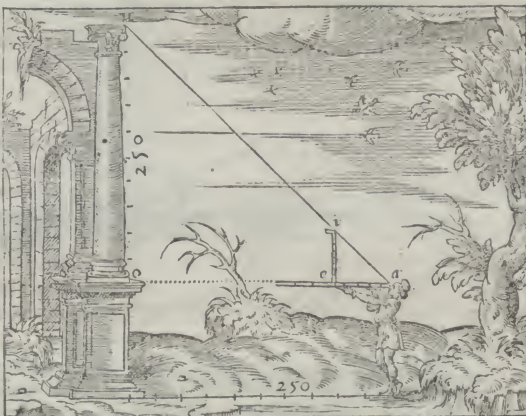


Ita alti-

Ita altitudo per 9 e 7 & auream regulam erit 26 pedum, unde tollendum segmentum indicis supra oram putei, relinquetur vera altitudo, ut si segmentum illud 13 partium valeat pedes 2, altitudo erit pedum 24. Secunda altitudinis dimensio.

II. Si visus sit ab initio indicis recti, erit ut segmentum indicis ad segmentum transversarii, sic data longitudo ad altitudinem.

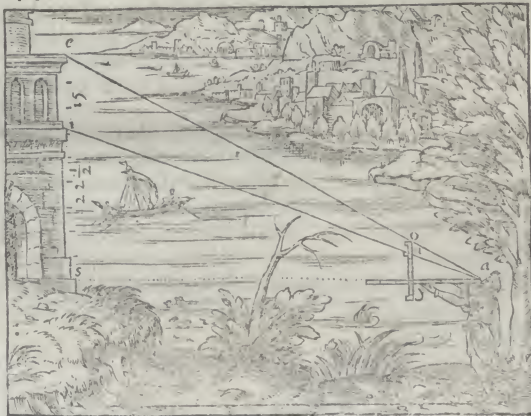
ut si indicis segmentum est 60 partium, transversarii segmentum 60 partium, longitudo data 250 pedes, per auream regulam altitudo erit 250 pedum: ut vides in subsecuto exemplo: ut enim a eadei, sic a e o ad u per 9 e 7. Sed inventa altitudinis altitudo mensuris



addenda est, quia si sit 4 pedum, tota altitudo erit 254 pedum. Et hic modus itaque

Si visus sit ab initio indicis recti per pinnam transversarii in terminos notae partis, erit ut intervallum pinnarum ad reliquum supereminentis transversarii, sic nota pars ad reliquam.

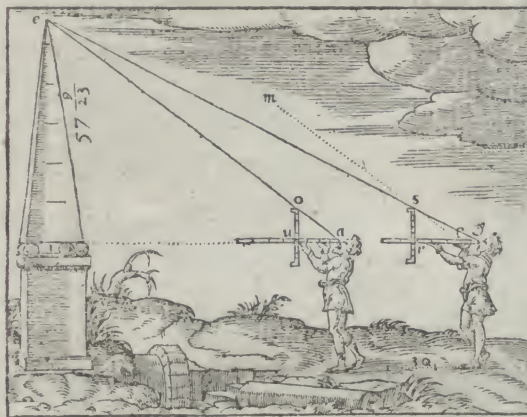
Consecrarium est de altitudinis nota parte, unde reliquum cognoscatur, ut in diagrammate. Sicut o u ad u y, sic e i ad i s. Nam ut o u ad u a, sic e i ad i a per 9 e 7: & ut u a ad u y, sic i a ad i s, & ex aequo: ut o u ad u y, sic e i ad i s. Hic habes terminos tres proportionis. Sit igitur o u 20 partium, u y 30, nota pars e i 15 pedum: Concludes pro reliquo i s



i 3 22 2

Dimensio altitudinis prima secundaque sic est, tertia sequitur.

12. Si visus sit ab initio indicis recti, erit ut in indice differentia segmenti ad differentiam distantie, sic segmentum transversarii ad altitudinem.



Huc revocatur subtilitas quæ fuit in tertia geodesia longitudinis: prima itaque collimatio fit ab *a* initio indicis perpendicularis, & est longitudine ignota *ai* per *o* terminum transversarii in eadem altitudinis *ei*: & segmentum indicis *ua*: secunda collimatio fit ab *y* initio ejusdem indicis & est majore distantia per *s* terminum transversarii in eandem metam *e*: &

segmentum indicis *rl*. Hic ut antea perfecta dimensio est, sumpta differentia *ipius* *yr* supra *uu*, demonstratio jam (ut antea) concludetur. Parallela *ls* contra *ao* erigatur. Hic primum triangula *oua* & *slr* æquilatera sunt per *2* & *7*, cum anguli *ada* & *l* exterior & interior æquales æquentur basi *ou* & *sr*, segmentum transversarii in utraque distantia idem manet. Itaque *ua* æquatur *rl*. Jam reliquum sorte quatuor graduum concluditur, ut *yr* ad *yu*, sic per *9* & *7* *sr* id est *ou* ad *ei*, & ut *ou* ad *ei*, sic *ai* id est *lr* ad *ai*. Itaque reliqua *yl* ad reliquam *ya* erit ut tota *yr* ad totam *yi*, ideoque de primo ad ultimum, sicut *sr* ad *ei*. Differentia itaque indicis esto *23*, differentia distantiarum *30* pedum, segmentum transversarii *44*: altitudo erit pedum. $57\frac{23}{23}$

Itaque est geodesia altitudinis patet differentia duarum altitudinum.

Nam cum utramque sumptis per aliquem antecedentium modorum, tolle minorem est majore. Hinc igitur inæqualium turrium altera, alterius altitudinem licet metiri. Primo ex minore sumatur longitudo per primum modum, quia altitudo minoris (in qua es) facilis est vel perpendiculo vel modo aliquo superiorum, tum metire altitudinem, quæ supra minorem est, & adde minori, habebis totius altitudinem per primum aut secundum modum. figura sic est, & de-

est, & demonstratur
per 9 e 7: ut enim ae ad
 ei , sic ao ad ou . Con-
tra e majore licet meti-
ri minorem. Si visus
primum à vertice ma-
joris deinde à basi, vel
medio loco per pinnā
transversarii, sit in ver-
ticem minoris altitu-
dinis, erit ut sunt dictae
partes indicū ad par-
tes primi indicis, sic al-
titudō intra stationes
ad suum excessum su-
pra quæsitam altitudi-
nem. Sūto enim par-



tes indicū 12 & 6, summaque 18 ad 12: sic altitudo 1190 pedum ad excessum
 $12\frac{2}{3}$ pedum. Reliquum igitur $1177\frac{1}{3}$ erit altitudo quæsitā as . Licet vero & à vertice
turris metiri distātiā turrium inter se: primus enim modus est metiendæ lon-

gitudi-
nis, neq;
quicquā
hic dif-
fert, nisi
quod ra-
dius ex-
tra datā
altitudi-
nē suspen-
ditur. fi-
gura sic
est, & de-
monstra-
tio est per
9 e 7: ut
enim est
ae segmē-



tum indicis ad ei segmentum transversarii, sic est data altitudo ao ad longitudi-
nem ou . Ergo altitudinis geodesia sic est, ubi data est longitudo vel pars altitu-
dinis, ut in primo & secundo modo, vel ubi duplex est distantia, ut in tertio.

13. Si vi-

13. Si visus sit ab initio indicis recti per pinnas transversarii inter
minos latitudinis, erit ut in indice differentiæ segmenti ad differentiæ di
stantiæ, sic intervallum pinnarum ad latitudinem.

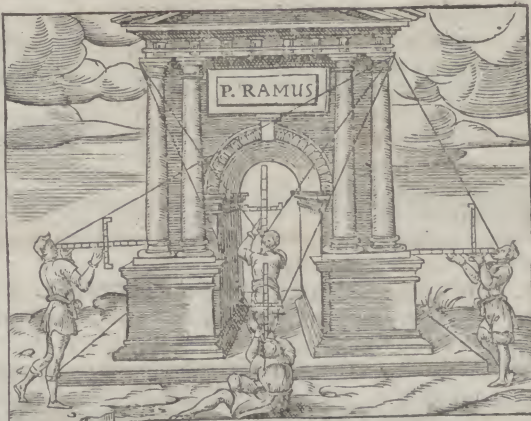
Supereſt ge
odæſia latitu
dinis, id eſt trāſ
verſa lineæ re
ctæ. figura &
demonſtratio
ſic eſt. Prima
collimatio ſit a
ei per o & u pin
nas tranſverſa
rii o u: ſecunda
ſit yei per s & r
pinnas tranſ
verſarii s r: tum
parallela per
punctum s, du
catur l s m con



tra a o e. Hic primum triangula o u a & s i l æquilatera ſunt per 2 e 7, quia anguli
u a o & j l s exterior & interior æquales æquatur baſi o u & s j per theſin. quia hic
ſegmentum tranſver
ſarii idem manet. Itaq;
u a æquatur i pſi j l. His
poſitis redit fere de
monſtratio tertiæ alti
tudinis: ut enim y l eſt
ad y a, ſic eſt s j ad e u,
& quia partes multi
plicatibus ſunt pro
portionales, ſic s r eſt
ad e i. Cætera enim cō
veniunt. Eadem geo
dæſia fuerit ſi ē loco
ſupero metiare ſubje
ctam latitudinem, ut
in poſtremo exēplo.
Atqui ē diſtantiæ duo
rum locorum, id eſt ē latitudine, ut arborum, montium, urbium, magna ge
ographis & chorographis adjumenta comparantur. Quamobrem geodæſia re
ctarum



clarū linearum
ejusmodi est in
longitudine, al
titudine, lati
tudine, unde pi
ctor archite
ctus, cosmogra
phus loci cuius
libet insignis fe
nestras, statuas,
pyramides, sig
na, denique lō
gitudinem & al
titudinem di
mensione sim
plici aut dupli
ci, latitudinem



tantum duplici, id est locorum omnium naturam symmetriamq; perspiciet. Ut
in subiecto exemplo liceat experiri.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. X.

de triangulato & parallelogrammo.

Atque hæc de geodasia linearum rectarum ē triangulis rectangulis, sequi
tur de triangulato.

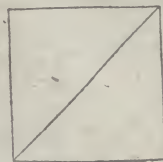
1. *Triangulatum est rectilineum compositum ē triangulis.*

Antea (ut dichotomia servaretur) ē linea factum est lineatum ad significan
dum genus superficiē & corporis, ita modo fit eadem de causa ē triangulo tri
angulatum ad exponendum genus quadrilateri & multilateri, & quidem iusti
us etiam, quam antea in lineato. Triangula enim triangulatum componunt,
non autem linea lineatum. Itaque

1. *Triangulati latera sunt binario plura triangulis.*

Ut quadranguli latera sunt 4, triangula ipsum quadrilaterum componentia

2: *Quinquanguli latera 5, triangula 3. Sexanguli latera, 6 triangula 4, & sic de
inceps, ut hic, & quidem minimum illud est.*



k Potest

Potest enim vel triangulum
secari in triangula quamli-
bet multa. Quod autem an-
gulis rectis interiores atque
exteriores aquantur in quo-
libet rectilinei genere, patuit
4 e 6: interiores in quadran-
gulo aquantur 4, in quin-
quangulo 6, in sexangulo 8,
& sic deinceps: Exteriores autem in quolibet rectilineo aquantur 4 rectis: ut



hic demonstrari potest per 1 e 8 e 5, & per 9 e 6.

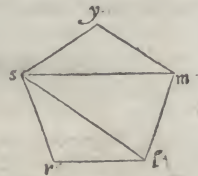
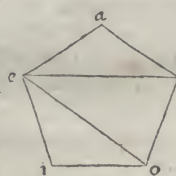
Et

2. Triangulata homogenea secantur in triangula aequa numero. e 20 p 6.

Nam si quadrangula sint, secantur in bina, si quinquangula in terna, si sexan-
gula in quaterna, & sic deinceps.

2. Triangulata similia secantur in triangula similia inter se & homo-
loga totis. e 20 p 6.

ut in his quinquangulis. Primum particularia triangula sunt similia inter se.
Nam aeu & ysm aequalium angulo-
rum crura sunt proportionalia ex
theli. Itaque triangula ipsa aequian-
gula sunt per 9 e 7. Ideoque similia
per 9 e 7. Atque ita de reliquis: me-
dia vero detractis aequalibus angu-
lis, reliquos aequales angulos habe-
bunt, ideoque aequiangula erunt
& similia per idem. Secundo trian-
gula aeu & ysm , $ei o$ & rl , eon & slm , nempe similia inter se, sunt per 1 e 6 in du-
plicata ratione homologorum laterum eu , sm , eo , sl , quae ratio est eadem pro-
pter communia latera. Itaque terna triangula sunt in eadem ratione, ideoque
proportionalia, & per tertiam compositionem, ut unum antecedentium ad u-
num consequentium, sic totum quinquangulum ad totum.



3. Triangulum est quadrangulum aut multangulum.

Partitionis hujus partes in Euclide sunt, sine tamen partitionis ulla specie, &
ab angulis species hic item nominantur, ut ante, quamvis a lateribus esset ve-
rius, ut quadrilaterum aut multilaterum, sed usus in verbis sequendus est.

4. Quadrangulum quod comprehenditur a quatuor lineis rectis. 22 d 1.

ut hic. Potest vero &
quadrangulum esse sphae-
ricum & conicum & cy-
lindraceum, & distinge-
ntias illas communes esse
praediximus. Et qua-
drangulum potest esse



planum,

planum, quod non sit quadrilaterum, ut hic: sed tamen quadrangulum pro quadrilatero intelligatur e sua definitione.

5. *Quadrangulum est parallelogrammum aut trapezium.*

Partitio autem suis item partibus in elementis est sine partitionis forma: sed differentia partium commodius ita distinguetur, quia parallelogramma in univsum communia multa sunt.

6. *Parallelogrammum est quadrangulum lateribus oppositis parallelum.*

ut in exē-
plo a e i o
est parallelu
laterio & ei
latus est pa-
rallelum op-
posito lateri
a o. Hac defi-



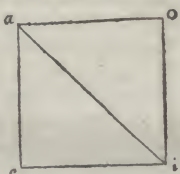
nitio ab Eu-
clide in definitionum catalogo præterita est, & ex ea facta est 33 & 34 p 1. Attamen sic ad 36 p 1 ad 4 & 10 p 6 parallelogrammi definitio assumitur
itaque
clide.

1. Si rectæ eadem parte conterminent æquales & parallelas, parallelogrammum consti-
tuent.

Quia ipsæ æquales erunt & parallelæ, per 5 c 12 e 5.

2. *Parallelogrammum oppositis & lateribus & angulis & sectis diametro segmentis æqua-*
tur.

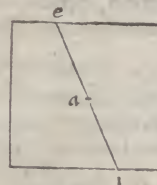
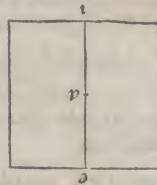
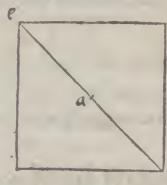
ut in a e i o oppo-
sita latera æquan-
tur per 5 c 12 e 5,
quia duæ rectæ cō-
terminant æquales
parallelas. De an-
gulis diagonus a i
ostēdit: facit enim



triangula a e i & i o a æquilatera, ideoque æquia ngula, cumque particulares an-
guli ad a & i sint æquales, totus totum æquatur. Hac vero pars est 34 p 1. Seg-
menta vero semper æqualia sunt, siue triangula sint, siue quadrangula quæ-

k 2 libet,

libet, ut in
subjectis fi-
guris. Dia-
meter enim
bifecat pa-
rallelogra-
mmum per
angulos,
aut per la-



tera bifecta, aut per altera laterum segmenta æqualia.

3. Diameter parallelogrammi bifecatur radiis æqualibus.

Ut in tribus supra figuris *a e i* id etiam cum circulo commune est, ut patuit

17 e 4.

4. Parallelogrammum est duplum basi & altitudine æqualis. 41 p 1.

Sequitur

cōparatio

primum in

ratione æ-

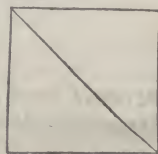
qualitatis.

parallelo-

grammi cū

triangulo:

Ut vides in



diagrammate. Nam parallelogrammum bifecatur diametro in duo triangula per antecedentem. Itaque duplum est dimidii.

5. Aequatur triangulo æqualto, basique duplo. 42 p 1.

Ut *a e i* triangulo

æquatur paralle-

logrammum *a o i*

u, quia dimidium

parallelogrammi

æquatur triangu-

lo. Itaq; dimidiis

æqualibus tota e-

runt æqualia. un-

de licet dato triangulo in dato angulo rectilineo parallelogrammum æquale

constitue-

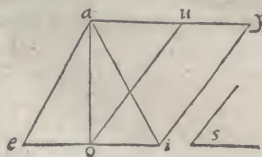
re: ut hic

dato trian-

gulo *a e i* in

dato angu-

lo *s*, licebit



æquare

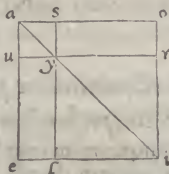
æquare parallelogrammum $ouyi$.

7. Parallelogrammum constat è binis & diagonalibus & complementis, & gnomonibus.

Hæ siquidem tres partes in geometricis rebus frequenter usurpantur, & i deo definiendæ fuerunt.

8. Diagonale est particulare parallelogrammum communis anguli & diagonii cum toto parallelogrammo.

Primo definitur diagonale: ut in toto parallelogrammo a eio , diagonalia sunt $auys$, ut y lir , quia sunt partes totius communis & anguli ad a & i & diagonii ai cum toto: non quod tota diagonius sit communis, sed quod particulares diagonii sunt partes totius diagonii.



Itaque diagonalia duo sunt. Hæc definitio diagonalis confusa est ab Euclide 24 & 26 p 6, ubi etiam τὴν ποτὶ διάμετρον παραλληλογράμμου, quæ circa diametrum parallelogramma describit, quæ nos diagonalia uno nomine nominamus.

9. Diagonale est toti simile similiterque situm è. 24 p 6.

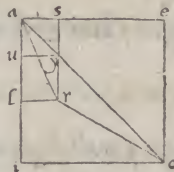
Diagonalis nulla ratio vel proportio proponitur, similitudo tantum proponitur, ut in eadem figura diagonale $auys$ simile est toti. Primo est æquiangulū. Nam angulus ad a communis est, eique æqualis qui ad y , ideoque etiam æqualis opposito ad i per 3 c 5 e. Tum anguli auy & asy æquantur per 12 c 5 angulis oppositis interioribus ad e & o . Itaque æquiangulum. Est item proportionale cruribus æqualium angulorū. Nam triangula auy & aei sunt similia per 9 e 7, quia uy parallela basi. Itaque ut au ad uy , sic ae ad ei , tum ut uy ad ya , sic e ad ia . Item per 12 c 5, quia sy est parallela basi io , ut ay ad ys , sic ai ad io . Ergo æquiordinate ut uy ad ys , sic e ad io : item ut sy ad ya , sic oi ad ia : & ut ya ad as , sic ia ad io . Itaque æquiordinate, ut ys ad sa , sic io ad oa . Denique ut sa ad ay , sic oa ad ai , & ut ay ad au , sic ai ad ae . Itaque æquiordinate ut sa ad au , sic oa ad ae . Quare diagonales ue est proportionale cruribus æqualium angulorum toti parallelogrammo oe . Demonstratio eadem fuerit, de diagonalibus il . Similis autem situs patet per 2 c 14 e 4. Atque hinc etiam patet diagonale quadrati quadratum, oblongi oblongum, rhombi rhombum, rhomboidis rhomboides esse, quia toti simile similiterque situm. Diagonalia vero cum similia sint toti & similiter sita, erunt item similia inter se & similiter sita, per 3 c 14 e 4. Itaque

Siparticulare parallelogrammum est toti coangulum, & simile similiterque situm, est diagonale. 26 p 6.

Assumi hoc potuit, sed etiam ut ab Euclide cogi potest, alioqui totum æqua-

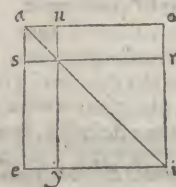
k 3 retu

retur parti, ut toti parallelogrammo $aeio$ particula re au sit coangulum, & communis anguli ad a simile toti similiterque sitū: dico esse diagonale. Secus esto diversa diagonis aro sit parallela rl contra ae . Itaque alr sit diagonale per ce . Jam igitur per s e ut a ad ai , sic a ad al : item ex thesi ut a ad ai , sic a ad au : Itaque eadem sa ad al & au proportionalis est, & al æquatur ipsi au , totum parti.



10. Complementum est particulare parallelogrammum a conterminis diagonalium lateribus comprehensum.

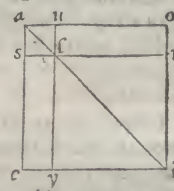
Ut in figura ur & sy , utrumque enim comprehensum est continuatis duorum diagonalium lateribus, & ideo complementa dicuntur, quia cum diagonalibus totum parallelogrammum complent. Neque vero diagonalia duo describi possunt, quin una complementa describantur. Euclides nusquam complementum definit, sed 43 p. 1 appellat ταύτων καὶ τῶν διαμέτρων παραλλήλων γωνίαν περιπληγύμεναι.



Complementa parallelogrammorum circa diametrum, tanquam complementa diagonalibus reliqua sint ad complendum totum parallelogrammum.

11. Complementa sunt equalia. 43 p. 1.

Complementorum nulla proportio, nulla similitudo proponitur, sed ratio tantum, ut in figura ur & sy complementa sunt equalia. Nam triangula aei & aoi æquantur per 3 c 5 e: item asl & aul , item lyi & lri . Itaque si triangula utrinque equalia detraxeris ab equalibus, relinques equalia complementa.

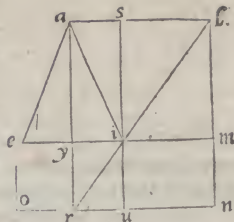


1. Si complementum alterum æquatur dato triangulo in dato angulo rectilineo, reliquum ad datam rectam comparatum eidem pariter æquabitur. 44 p. 1.

Ut si postules parallelogrammum ad datam rectam, & in dato angulo rectilineo

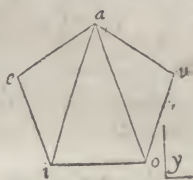
nece

neo æquale dato triangulo, proposito
facisfaciet. Sit triangulum aei , & datus
angulus o data recta iu , & parallelogra-
mum $ayis$ æquale triangulo in dato an-
gulo per s & e , tum latus ay æqualiter
ipsi data iu continuetur in r , & connecta-
tur ru & ab r diagonus concurret cum
 as infinita, idque in l per e & s , latera-
que yi & ru continuentur æqualiter ipsi
s in m & n , & connectatur ln . Hoc com-
plementum mn æquatur complemento y sequanti datum triangulum per præ-
cedentem, & in dato angulo rectilineo. Et

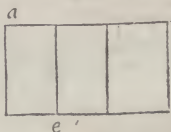


2. Si parallelogramma continenter æquantur triangulis dati triangulati in dato angulo recti-
lineo, totum parallelogrammum toti triangulato pariter æquabitur. 45 p 1.

Est confectarium superioris de rati-
one parallelogrammi cum triangu-
lo, neque demonstrationem præte-
rea ullam requirit, sed manum prom-
ptam in describendo. Rectam vero
tibi sumes infinitam, ad quam conti-
nues particularia parallelogramma,
ut si detur triangulatum $aeio$ u sol-
vetur in tria triangula aei , aio , aoi .



& angulus sit y , primum in dato angulo ad rectam infinitam facies per antec-
cedentem parallelogrammum ae in dato angulo æquale primo triangulo. Dein
de secundum triangulum ita de
scribes super infinita, ut cras al-
terum incidat in latus comple-
menti æqualis, reliquum in ante-
cedentia rejiciatur, & sic deinceps.
Hic habes complementa tria cō-
tinuata, & parallelogrammum continuantia, sed præstat in fabricando dele-
re antecedentia, & altera inferiorum diagonalium latera, ne quid interea cōfi-
sio linearum officiat. Itaque



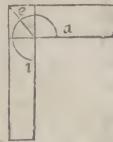
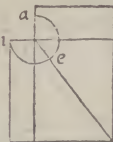
Parallelogrammum æquatur suis diagonalibus & complementis.

12. Gnomon est alterum diagonale cum duobus complementis.

2 d 2.

Gnomon duplex est in duobus exemplis, & sic Euclides definit. Omnis paral-
lelogrammi spatii circa diametrum ipsius parallelogrammum quodlibet cum
duobus complementis gnomon vocetur. Itaque gnomon componitur ex utro-
que ge-

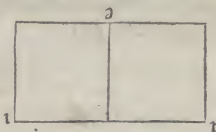
que genere
diagonalium
& comple-
mentorum.
Gnomonis
autem usus
in elemen-



tis nullus alius videtur quam ut uno nomine tres partes parallelogrammi si-
gnificentur, & tribus literis appellentur, ut hic *a e i*. Alioquin gnomon est perpen-
diculum, & sic Oenopides (ut ait Proclus 12 p 1) perpendiculum dicebat pro
gnomone more antiquo.

13. *Parallelogramma æquealta sunt ut bases.* 1 p 6.

Ut pa-
tet per
12 e 4.
Quia
sunt du-
pla tri-



angulorum per 2 c 5 e figurarum primarum: Ut *a e* & *e i*.

Parallelogramma æquealta in æquali basi sunt æqualia. 35. 36 p 1.

Ut patet in eodem exemplo.

Itaque

14. *Si parallelogramma æquiangula reciprocantur. cruribus æqualis
anguli, sunt æqualia: & contra.* 15 p 6.

Consecuta-
rium est ex
8 e 7. Ut hic
vides, & ta-
men & illud
(ut dictum
est) & hoc
consecutariū



potius est 13 e 4, quod hic etiam manifestius est.

Itaque

1. *Si quatuor recte sunt proportionales, parallelogrammum mediarum æquatur æquiangulo
parallelogrammo extremarum.* e 16 p 6.

Erunt enim parallelogramma æquiangula reciproca cruribus æqualis an-
guli.

Et

2. *Si tres recte sint proportionales, parallelogrammum mediarum æquatur æquiangulo paral-
lelogrammo extremarum.*

Consecutarium est e proximo.

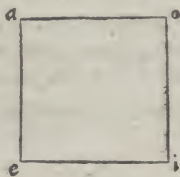
P. R A M I

Parallelogrammum est rectangulum aut obliquangulum.

Adhuc de parallelogrammis communia & generalia præcesserunt: specialia sequuntur in rectangulis & obliquangulis, quæ differentia (ut prædixi) est communis triangulis & triangulatis, sed hic nulla verbis saltem aptior ad genera proposita distinguendum.

2. Rectangulum est parallelogrammum quod habet omnes angulos rectos.

Ut in a e i o. Atque hinc intelligis ex uno angulo recto omnes rectos esse. Angulus enim ad a rectus opposito ad i æquatur per 2 e 6 e 10: ideoque ambo recti per c 8 e 3. Reliqui anguli ad e & o per 4 e 6 æquales duobus rectis, & æquales inter se per 2 e 6 e 10. Itaque singuli recti. Neque omnino in parallelogrammo rectus angulus esse potest, quin omnes recti sint.



Itaque

1. Rectangulum comprehenditur à duabus rectis angulum rectum comprehendentibus. 1 d 2.

Hæc Euclidis definitio comprehensionis verbo geometricam multiplicationem quandam significat: ut enim è duobus numeris inter se multiplicatis fit numerus, sic è duobus lateribus in se ductis fit rectangulum, nec tamen rectangulum quodlibet est rationale, ut antea patuit 9 e 4, & postea patebit 5 e.

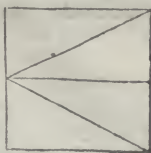
Et

2. Rectangula quatuor complent locum.

Neque omnino interest, æqualia, inæqualia, æquilatera, inæquilatera, homogenea, heterogenea sint quatuor. Quoquomodo enim versentur, anguli recti sunt: ideoque complebunt locum. Neque hic Aristotelis *τετραγωνον* accipere possumus, nisi rectangulum generaliter intelligat.

3. Si diameter bisecat latus rectanguli, recte secat: & contra.

Ut hic patet per 1 e 7 duobus diagonis bisectionis bisectionum: contra versa patet per 2 e 7, & 10 e 6.

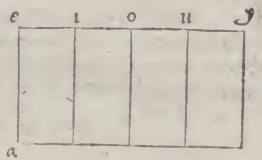


Itaque
Sim

Si inscripta recte bisecat latus rectanguli est diameter. Quia bisecat parallelogrammū.

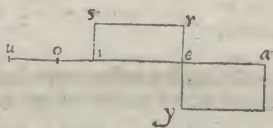
4. Rectangulum aequatur rectangulis ex ipsius uno latere & reliqui segmentis. 1 p 2.

ut hic rectangula quatuor particularia toti æquantur, quæ fiunt ex $a e$ uno ipsius latere, & segmentis reliqui $e i$, $i o$, $o u$, $u y$, cujus demonstratio est congruentia est, quia totum partibus congruit. Sed eadem ratio in numeris clarior est inductio-
ne partium, ut quater octona, sunt 32, frango 8 in 5 & 3, quater quina sunt 20, & quater terna 12, totum est 32, denique tota arithmetica multiplicatio ex totis numeris idem facit ac multiplicatio totius per alterius partes, imo partium per partes. Hæc propositio appellatur 9 cap. 1 constr. à Ptolemaeo.



5. Si quatuor rectæ sint proportionales, rectangulum mediarum æquatur rectangulo extremarum. 16 p 6.

Est $e i c i a e$
10, sed frequenter speciale cō-
sectariū hoc
appellatur
nomine re-
ctanguli. Ut

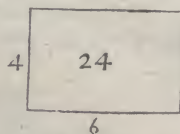


hic sunt quatuor proportionales $a e$, $e i$, $i o$, $o u$, & ab extremis $a y$ rectangulum, & mediis sit e.

6. Figuratus rectanguli rationalis appellatur planus. 16 d 7.

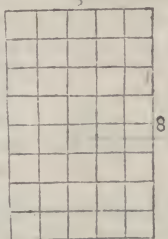
Figura rationalis definita est 9 e 4, qualis est rectilineis adhuc nulla fuit, prima est parallelogrammum rectangulum neque quodlibet, sed illud solum, cuius basis altitudini est rationalis, ratioque basis & altitudinis explicabilis est numero, ubi & figuratus definitus est. Rectangulum autem ex irrationalibus lateribus, qualia 8 e 1 dicta sunt, est irrationalis. Rationale itaque rectangulum est rationalibus lateribus accipitur, & ejus figuratus nomine generis appellatur planus, quia è toto planorum genere hæc sola species est rationalis. Si igitur re-

ctanguli basis
est 6, altitudo
4, area est 24, &
si constet are-
am esse 24, & ba-
sim 6 esse, con-



stabit altitudinem esse 4: exemplum sic est. Atque hæc multiplicatio ut patet ad 9 e 4 geometrica est, ut si multiplicies 5 per 8, facis 40 planum, & latera plana sunt

ni sunt 5 & 8, tanquam fecisses parallelogrammum rectangulum pedum quadratorum 40, cuius basis esset 5 pedum, altitudo 8, hoc modo: hac inquam multiplicatio est geometrica, nec ex lineis, ut illic ex unitatibus unitates, sed intervallo uno superior magnitudo creatur, superficies nempe. Hinc etiam patet geometriae trianguli. Nam cum crura recti anguli inter se multiplicaveris, facis totum parallelogrammum rectangulum, cuius dimidium est triangulum per 36610.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XII.
de quadrato.

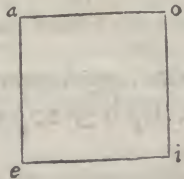
Rectangulum est quadratum vel oblongum.

Hac partitio fit verbis propriis, atres & differentia subiecta est communis ex angulis & lateribus.

2. Quadratum est rectangulum aequilaterum. 30 di.

Ubi hic vides a e i o.

Quadratum itaque cum sit aequilaterum, & rectis aequalibus equiangulum, e quadrangulis erit ordinatum. Latine vero distinctius quadratum dicitur quam graece τετραγωνον id est quadrangulum, quod generale & quadrilateris omnibus commune.



1. Latera quadratorum aequalium sunt aequalia.

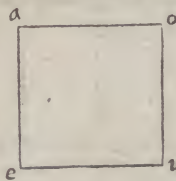
2. Potentia recte est quadratum.

Aliterque potentia verbum est Euclidi libro decimo usitatum. Dicitur autem linea recta posse quadratum, quia in se ipsam ducta facit quadratum. Potentia porro ista ut Aristoteles ait 5 & 9 phil. dicitur *ναρξ μετ' ομοιω*. Et

3. Si duae conterminae perpendiculares aequales claudantur parallelis, constituent quadratum. 46 p. l.

1 2 Utin

Ut in $aeip$ perpendiculara
res ao & ei æquales clau-
dantur parallelis ao , con-
tra ei & oi contra ie con-
stituent quadratum aei .
o. Parallelogrammum e-
nim est ex thesi, quia op-
posita latera parallela, &
rectangulum, quia cum



angulus perpendicularium aei sit rectus, omnes recti erunt per 2 c 11. Deinde u-
num latus ei æquatur omnibus, primum opposito ao per 6 e 10, & ipse a per
thesin, ideoque opposito oi per 6 e 10.

3. *Planus quadrati est planus æquilaterus.*

Est 18 d 7 paulo secus expōita. Quadratus numerus est, qui est æqualiter æ-
qualis, vel qui comprehenditur à duobus æqualibus numeris. Est vero qua-
dratum ex omnibus planis imprimis rationale, non tamen semper, sed tantū
rationale est cujus numerus est quadratus. Itaque quadrata numerorum non
quadratorum non sunt rationalia.

Itaque

Fit à numero in se ipsum multiplicato.

Quales quadrati sunt primi novem 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. à semel
uno, bis binis, ter ternis, quater quaternis, quinquies quinis, sexies senis, se-
pties septenis, octies octenis, novies novenis. Atque hæc summa est quadrati
numeri genesis & inventio per multiplicationem è dato latere. sed eadem in-
ventio subtilius multisque elementis ab Euclide proponitur, à quo si cui hinc
utilitas ulla speretur, licebit repetere. sequitur varia comparatio quadrati cum
rectangulo, cum quadrato, cum rectangulo simul & quadrato. Ratio cum re-
ctangulo primum est.

4. *Si tres rectæ sunt proportionales, quadratum mediæ æquatur re-
ctangulo extremarum: & contra. 17 p 6 & 20 p 7.*

Conse-

ctariolū

est è 2 c

14 e 10:

Ut in ae ,

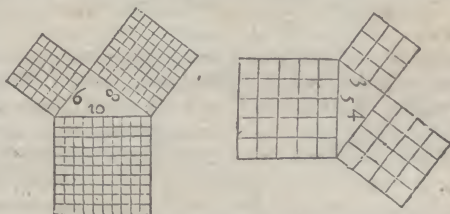
ei , 10. Cō

sectarium item hoc quadrati nomine infinite citatur, ut superius illud de re-
ctangulo.

5. *Si basis trianguli subtendit rectum, æque potest cruribus: & contra.
47 & 48 p 1.*

Comparatio quadrati deinceps est cum quadrato, primum ratio est æqua-
litatis

litatis est 5 & 8, confectarium quidem, sed tamen confectarium mirifice celebrantem à Pythagoreis, tanquam mater huius nondum nata & inventa esset. Et confectarium infinite quadrati nomine citatur, præ generali: ut permirum sit filia & parentem & honorem tantopere celebrari, matris autem parentem & honorem silentio sepeliri. De Pythagorea exultatione dictum est in proemio mathematico. Atqui confectarium hoc aliquando rationale numeroque explicabile, sed in triangulo vario tantum. Nam trianguli rectanguli æquicruri latera sunt irrationalia: varii autem aliquando rationalia, & quidem modo duplici, altero Pythagoræ, altero Platonis, ut Proclus author est ad 47 p. 1. Pythagorea ratio sic est ex impari numero.



1. Si quadratus imparis pro crure primo dati minuatur unitate, dimidius reliqui erit crus alterum, auctus unitate erit basis.

Ut in exemplo

laterum 3. 4. 5. Quadratus basis 5 est

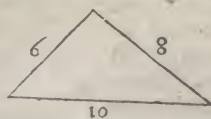
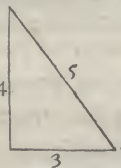
25 equalis quadratis 16 & 9 è cruribus 4 & 3. Pythagorici vero in hac

invèntione sibi præcipue placuerunt, eaque de causâ 5 invictus numerus ab iis dicebatur, tanquam

basis illa victrix esset, crura vero debellata, ut Alexander ait primo philosophiæ. Platonica sic est è numero pari.

2. Si dimidius paris pro crure primo dati quadretur, quadratus minutus unitate erit crus alterum, auctus unitate erit basis.

Ut in exemplo laterum 6. 8. 10. Nam basis 10 quadratus 100 æquatur quadratis 36 & 64 è cruribus 6 & 8. Ex hac ratione rationalium potentiarum (ut Vitruvius ait lib. 9 cap 2) normam exactissimam fabricari Pythagoras docuit tribus regulis in trianguli speciem compositis, quæ sunt ut 3. 4. 5. Hinc architectura in scalarum partibus arithmeticam proportionem didicit. Ea namque ratio quemadmodum in multis rebus & mēsuris est utilis etiam in ædificiis, scalarum ædificationibus, ubi tēperatas habeant graduum librationes, est expedita. Sic enim altitudo contignationis ab summa coaxatione ad imum libramentum divisa fuerit in partes tres, erit earum quinque in scalis scalarum iusta longitudinis inclinatio. Nam quam magnæ fuerint inter contignationem & imum libramentum



1 3 bramentum

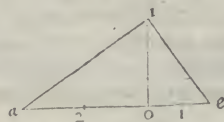
bramentum altitudinis partes tres, quatuor à perpendiculari recedant, & ibi collocentur interiores calces scalpiorum. Ita enim erunt temperata graduum & ipsarum scalarum collocationes.

3. *Diagonius potest duplum lateris, eique est asymmetra.*

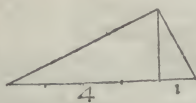
Uthic vides. Primum quadratum esto $aeio$, ex cuius diagonio ai fiat quadratum $aiuy$, erit duplum, cum nempe diagonius potest æquale utrique cruri æquali. Ergo potest duplum alterius, & hæc via est duplicandi quadrati à Platone tradita, ait Vitruvius 1 cap 9 lib. quod tamen etiam duplicari, triplicari, omninoque etiam data ratione augeri potest per 1 c 15 e 4, ut illic prædictum est. Quod autem diagonius sit asymmetra lateri est 116 p 10. Argumentum est quia daretur quadratus numerus duplus quadrati numeri. Quod Proclo 2 cap 2 Theonique & Campano ad 116 p 10 impossibile per se clarum visum est. At illud clarius est in libello de lineis individuis Aristoteli attributo. Quia par esset impar. Nam si diagonius sit 4 latus 3, quadratum diagonii 16 duplum erit ad quadratum lateris, & ita quadratum lateris erit 8, & idem erit 9 nempe ex 3, sicque par esset impar. Hanc asymmetriam Aristoteles frequenter appellavit, ut illam de tribus angulis duos æquantibus. Huc addi possit illud ad 42 p 10. Segmenta rectæ varie sectæ magis inæqualia majus posse.

6. *Si basis trianguli rectanguli secatur à perpendiculari ex angulo recto. Eto dupla ratione, potest sesquialterum majoris cruris, triplum minoris: si quadrupla, sesquiquartum majoris, quintuplum minoris, ad 13. 15. 16 p 13.*

ut in aei basis ae segmentum ao sit duplum ad segmentum oe , nempe 2 ad 1. Id enim esto secari dupla ratione,



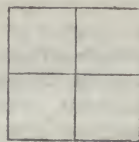
ut deinceps quadrupla, tota erit sesquialtera ad ao , ideoque per 3 c 4 e 8, & 1 c 15 e 4, quadratum ex ae sesquialterum ad quadratum ex ai , & eodem argumento triplum ad quadratum ex ei . Reliqua de quadrupla sectione patent in subiecta figura simili argumento.



7. *Si recta est secta quodlibet sariam, potest multiplex segmenti cognominis quadrato numeri sectionis.*

Sic

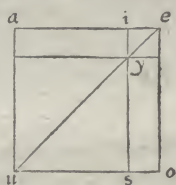
Sic biseſta poterit quadruplū dimidii cognomine quaternario, quadrato dimidii secundum quem fit biseſtio, sic triseſta poterit nuncuplum trientis, quadriseſta ſecundum decuplum quadrantis: Ut hic vides. Hoc The



oni poſtulat in demonstratione 18 p 13. Qualis progreſſio eſt in ſimilibus & planis & ſolidis in Eratoſthenis epiſtola ad Ptolemaeum, eſt ratione homologorum laterum aequemultiplicata dimensionibus.

8. Si recta eſt ſecta in duo ſegmenta, quadratum totius aequatur quadratis ſegmentorum duplici rectangulo utriusque. 4 p 2.

Tertia ratio quadrati deinceps eſt cum duobus rectangulis & duobus quadratis primo aequalitatis. Conſectarium eſt eſt c



ne ro, quia parallelogrammum aequatur diagonalibus & complementis. Si recta a e ſecta ſit in i facit quadratum a e u o majus quam ſegmentorum a i & i e quadrata u y & y e duplici rectangulo a y & y o. Itaque

Latus primi diagonalis eſt latus alterius complementi, & duplicatum eſt latus ſimul utriusque reliquum autem latus ſimul utriusque eſt latus reliqui diagonalis.

Hæc ratio eſt quadrati cum rectangulo & quadrato. Quadrati autem numero propoſiti latus ſape queritur. Itaque per proximum elementum, & ejus conſectaria analyſis quadrati lateris inſtructa eſt. Queratur igitur latus jam propoſiti quadrati, & geneſis ante ſpectetur, qualem hic eſt numerorum multiplicatione in numeris iſtis vides.

10	2	
10	2	
2	4	
2	0	
1	0	0
1	4	4

Hæc

Hæ ratio est quadrati cum rectangulo & quadrato, unde habetur analysis quadrati lateris explicabilis numero. Eadem siquidem via est Thebis Athenas, quæ Athenis Thebas: Et hæc geometricæ analyseos usus superest, ut postea in cubo, cum aliis in totis elementis nullus sit. Hic igitur primo notabis quadratos singulares sinistrorsum ab ultima nota crescentes locis imparibus, & deinceps uno intermisso desinere, sic 144, hæ notæ significant quod singularia latera sint colligenda, ut universum latus compleatur. Deinde quod primis exemplis notum est, quadrati maximi in primum punctum desinentis, latus pro quoto adnota, & ipsum quadratum à numero in idem punctum desinente subducto, latus erit 1, nec quicquam restabit, sic 144 (1: hæc primi lateris singularis est inventio: Secundo duplica latus jam repertum, fient 2 & subijce sequenti plano 4 ex duobus planis factio, quia latus est amborum planorum in unum compositorum, & per hoc latus divide totum planum, evenit 2 pro secundo quoto, reliquum nempe ejusdem plani latus: quod quia latus est etiam quadrati sequentis, subijcto sequenti puncto tanquam divisoris notam: facta multiplicatione dividendium notarum & factorum subductione nihil restabit. Sic erit exemplum totum.

$$\begin{array}{r} 444 \\ 222 \text{ (12)} \\ 44 \end{array}$$

Quare hæc numeratione divisio plani sola est cujus, etiam latus negligitur & tantum quæritur, quia quadrati sequentis latus est. Quærat latus 15129. Primo notato imparis locos, sic 15129. Deinde quadrati maximi in primum punctum desinentis latus adnotato & lateris quadratum subducto, nihil restat. sic

$$\begin{array}{r} 15129 \text{ (1)} \\ 4 \end{array}$$

Secundo repertum latus 1, duplicatum subijcto plano sequenti 2, & per illud dividito ipsum planum, eveniet 2, reliquum latus adnotandum in quoto secundo loco post jam repertum latus, & subijciendum sequenti puncto peracta factorum subductione, manebunt 7. sic

$$\begin{array}{r} 7 \\ 15129 \text{ (12)} \\ 22 \\ 44 \end{array}$$

Hæc secunda singularis lateris est inventio. Tertio reperta latera duplicentur velut unum, & unius præcedentis quadrati. Quamvis enim in universi quadrati la-

drati latere retexendo quadrati singularis duobus plures incidant : attamen duo tantum considerantur, & precedentium omnium latera pro unius quadrati latere numerantur. Ergo reperta latera velut unum duplicentur, fient 24, & subjiciantur plano sequenti 72, planus divisus dabit 3, reliquum plani latus adnotandum tertio loco post reperta latera, & subjiciendum sequenti puncto, facta subductione nihil restabit.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 72 \\ 24 \end{array} (123)$$

Aliquando post quadratum jam repertum locis proximis, nec planus nec quadratus est ullus. Itaque latus ejus singulare erit 0 : ut in quadrato 36025, latus univrsum est 605, ex tribus lateribus singularibus, quorum medium est 0. Aliquando etiam planus intermedius partem sequentis quadrati continet. Itaque si latus reliquum majus sit latere quadrati sequentis æquandum est, ut quadratur latus quadrati 784, primi quadrati latus erit 2, & supererunt 3 sic.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 784 \\ 4 \end{array} (2)$$

Tum latus idem duplicatum subjiciatur plano sequenti 38, planus divisus daret 9 pro reliquo latere : at hoc latus majus esset latere sequentis quadrati : minuatur igitur 1, & pro latere 9 sumatur 8 latus, & adnotetur, sequentis quadrato subjiciatur, facta subductione nihil manet.

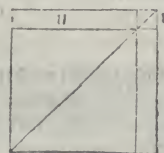
$$\begin{array}{r} 8 \\ 784 \\ 48 \end{array} (28)$$

Atque hinc patet inventio medii proportionalis inter duos datos numeros, si quis tamen est. Nam si factus à duobus est quadratus, latus quadrati est medium inter datos, ut patet per auream regulam, si propositus numerus non est quadratus. Arithmeticum latus & numero explicabile nullum reperietur, & hic numerus figuratus est umbra figuræ geometricæ, nec assequitur, neque tale quadratum est rationale : Quadrati tamen in eo maximi numerabile latus inveniri potest : ut in 148, numerus quadratus 144 continetur, & latus ejus est m 12, super-

12, supersunt vero 4. Latus igitur talis numeri non quadrati exactum nullum est, nec ullum unquam tam vero propinquum reperietur, quin vero propius posset inveniri. Itaque est inexplicabile numero. Duo huiusce inventionis modi sunt, alter per gnomonis additionem, alter per dati numeri non quadrati reductionem ad partes majoris alicujus nominis.

Si latus inventum duplicetur, & duplicato unitas addatur, totus erit gnomon proxime majoris quadrati.

Nam latus est complementum alterum, & duplicatum est simul utrumque, unitas autem est ultimum diagonale: Ut hic vides circumponi gnomonem quadrati o prioris, eamque differentiam esse quadrati majoris à minore, ubi Aristotelis gnomon additus quadrato auget, non mutat speciem: quod perpetuo verum est, si majoris quadrati gnomon addatur proximo minori quadrato tanquam diagonali. Itaque ut gnomon habeatur pro reliquo nominatore duplicatur inventum latus pro duplicato complemento, & unitas additur pro diagonali. Sic latus numeri 148 est $12\frac{4}{7}$, cujus ratio pēdet ex eadem propositione, unde & latus integrum invenitur. Cum enim latus uniuscujusque quadrati proximo minoris tantum distet unitate à latere proximo majoris quadrati, eadem unitas & bis in quadrati precedentis latus & semel in seipsam ducta gnomonem majoris lateris quadrato adjicit: Nā quadratū facit 169. Quo intelligitur quātū numerator 4 abest à nominatore 25, tantū gradatū 148 abesse à proximo maiore quadrato. Nā si addas 21, quo abest 4 à 25 facies quadratū 169, cujus latus est 13. Secundus modus est per reductionem ad datas partes magni nominis, ut centesimas, millesimas, aut minores alias, & quidem quadratas, ut earum latus centum jam conficit. Quanto autem minores fuerunt, tanto propius vero latus invenietur. Sit idem exemplum 148 reductum ad centesimas quadratas $148\frac{8000}{10000}$ nominatoris latus est 100: numeratoris autem 1216, & supersunt 1344, sic $12\frac{16}{100}$ id est $12\frac{4}{25}$, vel $\frac{304}{25}$ quod primo etiam modo patebat. Sed in latere numeratoris præter 1216 supersunt 1344, quo tantulo modus hic est accuratior priorē: reliqua tamen ista negliguntur, quia ne unam quidem centesimam invento lateri possunt addere, neque enim $\frac{1344}{10000}$ faciunt unam centesimam. Atque etiam in minoribus partibus secundus modus præter reliqua monstrat latus aliquanto majus latere per primum modum reperto, ut in 7 latus est per primum modum $2\frac{2}{7}$: At per secundum modum latus 7 reductū ad quadratas millesimas, id est $7\frac{000000}{1000000}$ id est $7\frac{141}{10000}$ & supersunt 3975. At $7\frac{141}{10000}$ sunt majores $\frac{3}{7}$. Nam $\frac{3}{7}$ reducta ad 1000 sunt $\frac{6000}{10000}$. Itaque secundus modus in hoc exemplo superat primum $\frac{41}{10000}$, neglectis etiam reliquis 3975. Ergo hæc analysis est quadrati lateris è prima ratione quadrati duplici & rectangulo & quadrato æqualis.



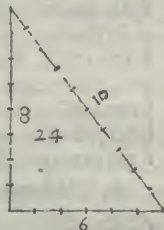
Triangula

Trianguli Geodesia.

Trianguli cujuscunque geodesia generalis una est apud Heronem laterum additione, subtractione, multiplicatione, & quadrati lateris inventione hoc modo.

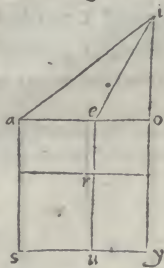
9. Si de dimidio collectorum laterum dati trianguli latera sigillatim subducantur, latus continue facti è dimidio & reliquis erit area trianguli.

Ut latera trianguli a & i collecta sunt 24, dimidium 12, unde subductis lateribus 6, 8, 10, reliqua sunt 6, 4, 2: jam fac continue primo 72 è 12 & 6, secundo 288 è 72 & 4: tertio 576 è 288 & 2. Latus continue facti 576 est 24 area trianguli. Geodesia ista generalis facillima & expeditissima est, si latera integro numero numerentur, quamvis si causam requiras ænigmati potius, quàm theoremati germana sit. Itaque demonstratio ejus in Herone nulla est. Jordanus & Jordano posteriores demonstrare conati sunt, sed obscure & per stereometriam, quam etiam continuationis multiplicationis è dimidio & reliquis in ipso theoremate videtur indicare. Demonstrationem itaque hanc rejecimus in scholas ad finem ultimi libri, si quis requirat. Specialis autem geodesia trianguli rectanguli jam dicta est, sed obliquanguli postea dicitur. Sed generalis longe præstantior: Nam reductione obliquanguli multæ fraudes accidunt, ut lepido voto ardanus tantum Cagri optasse videatur quantum pseudographia ista deperiret.



10. Si basis trianguli subtendit obtusum, plus potest cruribus duplici rectangulo alterius, & ex eo continuationis ad verticis perpendicularem. 12 p 2.

Comparatio quadrati cum duobus item rectangulis & totidem quadratis est, sed inæqualitatis. Ut in triangulo a & i basis a quadratū majus est, quam quadrata crurum a & i duplici rectangulo ar , quod fit ex altero crure a & continuatione eo . Nam per s e quadratum ex a i æquatur quadratis ex ao & io id est tribus quadratis, ex io , oe , ea , & duplici dicto rectangulo. At quadrata crurum a & i æquantur quadratis tribus illis ex a e nempe suo & ex i duobus, primo io , secundo ex oe per s e. Itaque excessus restat duplicis rectanguli.



m 2 P. RAMI

Oblongum est rectangulum in æquilaterum. 31 d 1.

Ut hic a e i o. Hæc rectanguli species secunda in elementis ad solam definitionem proprie nominatur ab Euclide. Ratio oblongorum copiosa est & data rectæ triplici sectione rationali interdum & explicabili numero, prima sectio est ut libet, id est in duo segmenta qualibet æqualia vel inæqualia: unde ratio quadruplex oritur.

2. Oblongum est tota & segmento æquatur rectangulo segmentorum,

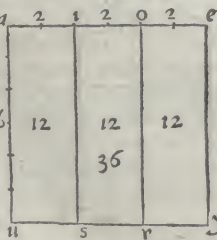
& prædicti segmenti quadrato. 3 p 2.

Confectarium est e 4 & 11. Rectangulū enim segmentorū & quadratū sunt ex altero latere & reliqui segmentis. Ut recta a e secta sit in a i 2 & i e 4, rectangulū 12 ex a e 6 & a i 2 æquatur rectangulo i u 8 & segmentis a i & i e, item quadrato 4. 4 prædicto segmento a i: rectangulum autem hic ideo

proponitur, quia potest & quadratum esse, si linea nempe sit bisecta. Secundo.

3. Oblonga est tota & segmentis æquantur est tota quadrato. 2 p 2.

Confectarium item est e 4 & 11, ut recta a e 6 secta sit in a i 2, i o 2, o e 2, oblonga 12 a s, a 2, i 2, o 2, e
12 i r, 12
o y, est tota
recta a e,
illisque
segmentis æquatur quadrato a y
est tota:



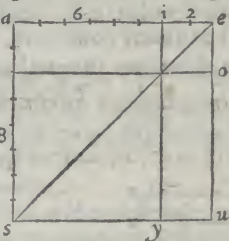
Hic segmenta duobus plura sunt, & tamen à primo reliqua pro uno sumi possunt, cum

sunt, cum rectangulum particulare item sit cum illis æquale. Hæc propositio adhibetur ad 6 e 18.

Tertio.

4. Oblonga duo è tota & segmento cum tertio quadrato reliqui segmenti æquantur quadratis totius & prædicti segmenti. 7 p 2.

Ut recta ae 8
secta sit in ai 6
& ie 2, oblonga
 ao & iu è tota &
segmento 2 sunt
32: quadratum 8
è 6 reliquo seg-
mento est 36, to-
tumque 68, to-
tus autem ae 8



quadratum est 64, & prædicti segmenti 2 est 4, summaque eadem 68.

5. Basis trianguli acutanguli minus potest cruribus duplici oblongo ex altero crure & ejus segmento à dicto angulo ad verticis perpendicularem.

13 p 2.

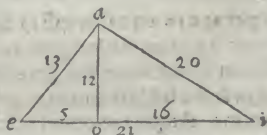
Ut in triangulo aei su-
matur angulus ad i acu-
tus. Hic per i oblonga
duo ex ei & oi cum qua-
drato eo æquantur, qua-
dratis ex ei & oi , commu-
ne addatur quadratum
ex ao . Hic quadratum ex



ei cum quadratis ex io & oa , id est per 5 e 12 cum quadrato ex ia æquatur duo-
bus oblongis ex ei & oi cum duobus quadratis ex eo & oa , id est per 5 e 12 cum
quadrato ex ea . Itaque duo oblonga cum quadrato basis æquantur quadratis
crurum, vinciturque basis à cruribus duobus oblongis. Atque hinc habetur
perpendicularis in triangulo.

Itaque
Si quadratum basis acuti anguli tollatur è quadratis crurum, reliqui dimidio per crus diviso,
quotus erit segmentum dividens à dicto angulo ad verticis perpendicularem.

Ut in triangulo acu-
tangolo aei sunt latera
13. 20. 21. & ae sit basis a-
cuti, quadratum ejus e-
rit 169, quadrata cru-
rum ai & ei addita 341,
& inde sublato quadra-



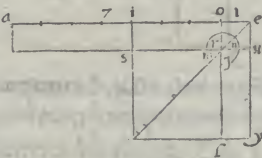
to 169 relinquuntur 672, dimidium 336, quo diviso per 21 quotus erit 16, seg-
m 3 mentum

mentum dividētis cruris ei ab angulo a i e ad vertex perpendicularē a d: re-
liquum itaque segmentum erit 5; iam de 169 quadrato basis 13, tollatur 25 qua-
dratum ē minoris segmento 5, relinquentur 144 pro quadrato perpendiculari-
ris per 5 & 12. Hic inventa perpendicularis & latus secūm latera sunt rectanguli,
cujus dimidium erit area trianguli, ut hic rectangulum ē 21 & 12 erit 252, dimi-
dium 126 erit area trianguli. Hoc Theon paulo tamen secus in 6 lib. magnæ cō-
structionis; sequitur secūda scēio, unde quatra exiit ratio.

6. Si recta est bisecta, secusque oblongum inaequalium segmentorum cum quadrato intersegmenti aequatur quadrato bisegmenti. § p. 2.

Ut recta ae sit bisecta in ai 4, & ie 4, secusque in ao 7 & oe , oblongum ex 7 &
 x , cum 9 quadrato intersegmenti io 3 id est 16. æquatur 16 quadrato bisegmen

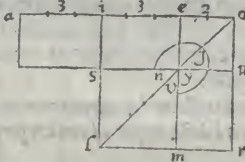
ti e 4. Quod etiā
geometricè patet
completo diagrā
mate. Nam si pa
rallelogrammum
ipsi i 4 parallelo
grammo per 13 e



7. Si recta est bisecta & continuata, oblongum continuatæ & continuationis cum quadrato bisegmenti æquatur quadrato compositæ ex bisegmento & continuatione. 6 p 2.

ut recta ae 6 bisecta in ai 3 & ie 3 & continuata in eo 2, oblongum ic ex 8 con

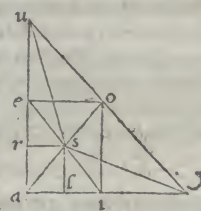
tinuata & continuatio-
ne 2 cum 9 quadrato bi
segmenti id est 25, a qua
tur quadrato 25 ex 3 bi
segmento & continuati-
one 2 id est 5: geome-
trica item conclusio hic



inventione duarum continue mediarum proportionalium inter duas datas: unde exiit problema deliacum quod Apollinem ipsum exercuit. Mesographus autem Heronis est infinita regula, quae sistitur cochleato unico per cavum mobili, est vero ut Pappus ait initio libri tertii mesographus iste architectis aptissimus, multoque promptior Platonis mesographo: mesographi mechanica est apud Eutocium secundi de sphaera, sed paulo facilius a nobis ita proponetur.

8. Si duas datas rectas comprehendentes rectangulum, & infinite continuatas mesographus tangens oppositum angulum angulo datarum interfecet aequidistanter a centro, intersegmenta erunt media continue proportionalia datis.

Ut datas rectas ae & ai comprehendentes rectangulum ao & continuatas mesographus uy tangens angulum o oppositum angulo datarum interfecet aequidistanter a centro: Centrum quidem concursus diagoniorum ao & ei ostendet in s : ad aequidistantiam autem a centro volendus est mesographus, & adhibendus circinus, & hoc mechanicum nullo principio geometriae certo adhuc inventum est, ut protinus actione prima aequidistantia deprehendatur. Sint igitur aequidistantia puncta u & y . Dico intersegmenta esse media: utque ae est ad iy , sic iy esse ad eu , sic eu ad ai . Primum esto a centro s perpendicularis sr in latus ae bisecabit latus ae per 3 & 11 . Itaque per 7 oblongum ex au & ue , cum quadrato re aequatur quadrato ru , assumptoque communi rs oblongum cum duobus quadratis er & rs , id est per 5 & 12 cum quadrato se , aequatur quadratis ru & rs , id est per 5 & 12 quadrato su . Simillimum est de oblongo ex ay & yi , ducta sl perpendiculari ut prius. Hoc enim oblongum cum quadratis li & sl id est per 5 & 12 cum quadrato is aequatur quadratis yl & sl , id est per 5 & 12 ys . Itaque oblonga aequalibus aequalium quantur inter se, sublatiisque utrinque aequalibus aequalium radiorum per 3 & 6 & 10 quadratis se & si relinquentur aequalia. Quare per 14 & 10 laterum aequalium rectangulorum sunt reciproca, utque ua ad ay , sic yi ad ue . Jam vero ut ua ad ay , sic per 9 & 7 oi , id est per 6 & 10 ea ad iy , & sic igitur ex conclusio yi ad ue , & sic per 9 & 7 ue ad oi id est per 6 & 10 ad ai . Itaque ut ea ad iy , sic yi ad ue , & sic ue ad ai . Quare intersegmenta eu & iy sunt continue proportionalia inter datas.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XIII.

de recta proportionaliter secta & de reliquis quadrangulis.

Adhuc sectio triplex fuit, unde aequalitatis rationes quinque fuerunt rationalis

nalis: sequitur de sectione tertia alia sectio in segmenta duo tota proportionalia. Sectio ipsa primum definienda.

1. *Recta secatur secundum mediam & extremam rationem, quando fuerit ut tota ad majus segmentum, sic majus segmentum ad minus.* 3 d 6.

Hæc definitio geometrici generis tota est, per tropum tamen quendam sermonis ratio media & extrema dicitur pro medio & extremo proportionis termino. Secatur enim hæc linea sic, ut ipsa cum duobus segmentis faciat tres proportionis terminos, ipsaque tota sit primus terminus, majus segmentum medius, minus sit tertius, id breviter & proprie dicatur secari proportionaliter. Proportioni autem sectionis hujus à Campano 10 p 14 mirabilis potentia tribuitur in adscriptionibus ordinatorum solidorum: Cui (ait) cum plurima philosophantium admiratione digna conveniant, hoc principium vel præcipuum ex superiorum principiorum invariabili procedit natura, ut tam diversa solidatum magnitudine tum basium numero, tum etiam figura irrationali quadam symphonia rationabiliter conciliet. Hæc Campanus, jasioquin laudum orator parcissimus. Eadem sectionis proportio divina appellatur à Luca Paciolo in libro hæc de re percripto, & ejus singulares usus comperientur vel in elementis Euclideanis de fabrica quinquanguli, icosacedri, dodecaedri. Atque inde & caelestium rerum præcipua mysteria à Ptolemæo repetuntur.

2. *Si recta proportionaliter secta est rationalis data mensura, segmenta sunt ad eam & inter se irrationalia.* 6 p 13.

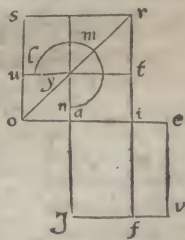
Euclides appellat utrumque tale segmentum ἀποτμήματα residuum, & certe segmenta hæc aliter explicari non possunt quam per residuum, ut si linea 7 pedum ponatur hoc modo, majus segmentum dicetur linea 7 pedum unde minus segmentum detractum sit, neque minus segmentum potest aliter explicari, nisi pars reliqua lineæ 7 pedum, unde majus segmentum sit detractum. Triangulum & è triangulatis omnia excepto parallelogrammo rectangulo, irrationalia esse sumuntur in geometria, neque tamen ponuntur, & hoc item sumi potuisset. Hæc igitur sectionis proportionalis definitio est: sectio sequitur è ratione oblongi cum quadrato.

3. *Si quadratum fiat e' data recta, rectæ ab angulo facti ad medium contermini lateris differentia supra dimidium erit majus segmentum data proportionaliter sectæ.* II p 2.

Estò data ae , quadratum ex ipsa ae i o & ab angulo e ad u medium contermini lateris, sit recta eu , & comparctur dimidio ua , differentia supra dimidium erit ay , quam dico majus esse segmentum data ae proportionaliter sectæ. fiat ex
ea qua

Ut in eodem exemplo recta & continuata est majore segmento, & oblongum
 ē tota & minore segmento æquatur quadrato majoris. Atque ita licet infinite
 proportionaliter secando rectam augere, itemque contra minuire: minus seg-
 mentum rectæ proportionaliter factū est majus segmentum majoris proportio-
 naliter facti: hinc diminutio fiet in infinitum.

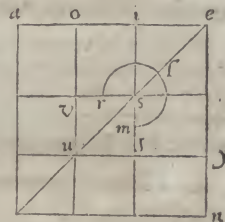
Hæc fabrica est proportionalis sectionis. ratio triplex sequitur: prima est ma-
joris segmenti. Recta igitur ae fecerit proportionaliter in i , majusque segmentum sit ia , & secta cōtinuetur in io , ut oa sit dimidium sectæ: dico quadratum ex io quintuplum esse quadratæ ex ao : fiat igitur ex ao quadratum ay , item ex io fiat quadratum $iosr$, videmus quadratum ua semel comprehendi in quadrato si . jam doceamus in gnomone reliquo lmn quater comprehendi, & describat quadratum $aejv$ & cōtinuetur in sf , hic quadratum ae quadruplum est per 7 e 12 ad illud ua descriptum ē dimidio, & æquatur gnomoni. Nam pars iv æquatur ipsi sr , primo per thesim cum a sit majus segmentum, undery fiat quadratum, quia diagonale alterum etiam quadratum: secundo complementis sy & yi per 11 e 10 æquantur, & iis æquatur af . Nam per 12 e 10 , perque thesim dupla est complementi y . Itaque æquatur utri-



que. Quare gnomon æquatur quadrato quadruplo dicti quadratuli, majusque segmentum continuatum dimidio data potest quintuplum. Conversa patet in eodem exemplo. Nam cum io possit quintuplum ipsius ao , gnomon lmn erit quadruplus ipsius ua , cujus etiam per 7 & 12 quadruplum est av . Itaque æquale gnomoni: aj autem æqualis ipsi ae : Itaque dupla etiam ipsius ao id est ipsius ay , & ideo per 13 & 10 fit duplum ipsius at , ideoque æquale complementis iy & ys ; reliquum igitur diagonale yr æquatur reliquo rectangulo iv . Quare per 4 & 12 ut iv id est ae est ad yt id est ai , sic ai ad ie . Quare per 1 & ae secatur proportionaliter, & majus segmentum est ai dictum reliquum. sequitur altera proprietas quintupli.

5. *Minus segmentum continuatum dimidio majoris potest quintuplum ejusdem dimidii. e' 3 p 13.*

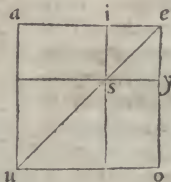
Ut hic recta ae secetur in i proportionaliter, & minus segmentum ie continetur usque ad o dimidio majoris ai . Dico oe posse quintuplum ipsius io . fiat igitur ex linea ae quadratum, & compleatur figura, noteturque dimidii quadratum su & gnomon rlm . Hic primum quadratum oy est quintuplum secundis su . Comprehendit enim semel & gnomon reliquus rlm quater: æquatur enim oblongo in , quia os complementum æquatur ipsi sy per 11 & 10 , & ideo ipsi jn , cum totum complementum as totis sn æquetur, & av ipsi os æquetur per fabricam & 12 & 10 , additoque utrique communi iy , totus gnomon toti oblongo æquatur. At oblongum in æquatur quadrato as per thesim & 4 & 12 , quod per 7 & 12 quadruplum est quadratis su . Quare minus segmentum ie continuatum io dimidio majoris potest quintuplum ejusdem dimidii.



Sequitur ratio tripli.

6. *Tota & minus segmentum possunt triplum majoris. e' 4 p 13.*

Sit recta ae secta proportionaliter in i , & figura compleatur, oblonga ay & io cum quadrato su per 4 & 13 æquantur quadratis ex ae & ie potentibus triplum ipsius ai . Nam semel continent quadratum su , & oblongum utrumque eidem quadrato su æquatur per thesim & 4 & 12 . Itaque ter continent.



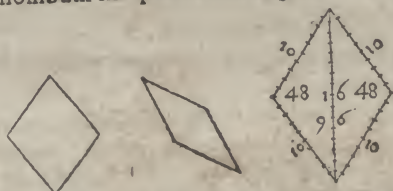
7. *Parallelogrammum obliquangulum est rhombus aut rhomboides.*
Haecenus

Hactenus geometria fuit parallelogrammi rectanguli, superest brevissima in Euclidis elementis geometria de parallelogrammo obliquangulo, deque rectilineis reliquis, neque omnino proluxa geometria hic requirebatur, quia ex antecedente tota percipitur, reducendo nempe ad parallelogrammum per 2 c 11 et 10, quod per species specialibus exemplis intelligitur. Euclides autem sine ulla partitionis luce negligentius exposuerat, & a Posidonio ob eam causam emendatus, ut Proclus indicat: Nos igitur ex methodica lege istam lucem aspernari nequaquam debuimus: parallelogrammum obliquangulum jam definitum est ex opposito parallelogrammi rectanguli: ut patet 2 c 11, ubi omnes obliqui sunt anguli, neque enim potest unus rectus esse in parallelogrammo, quin omnes sint recti, nec unus obliquus, quin omnes etiam sint obliqui. Dichotomia vero opposito genere respondet parallelogrammo rectangulo quadrato & oblongo. Nam quadratum & oblongum in rhombum & rhomboides dislocantur.

8. Rhombus est obliquangulum equilaterum. 32 d 1.

Unde constat rhombum esse quadratum angulis veluti compressum, quo

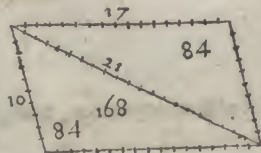
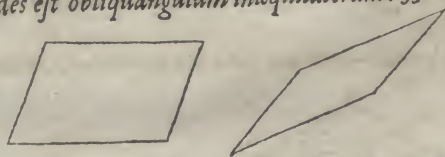
nomine & piscis & nentium mulierum instrumentum & in vitreis fenestris dissectae plumbo laminae, quia figura



hanc praeseferant, appellantur. Quo vero compressior rhombus fuerit, tanto magis duo acuti erunt anguli, duo obtusi, ut hic. Exemplum vero metiendi rhombi in triangula facti sic est, geodasia enim triangulorum a triangulis repetitur.

9. Rhomboides est obliquangulum inaequilaterum. 33 d 1.

Et rhomboides oblongo sic opponitur, ut rhombus quadrato, sic item quanto major coarctatio fuerit, tanto major inaequalitas erit angulorum obtusorum & acutorum, ut hic. Et rhomboides dicitur tamquam rhombosimile, tametsi simile praeter inae-

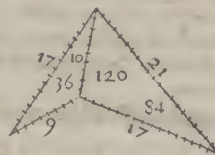
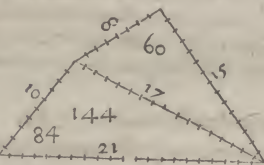
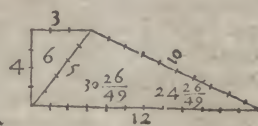
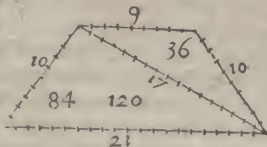


n 2 qualita

qualitatem angulorum nihil habet, mensuræ exemplum sic esto.

10. *Trapezium est quadrilaterum, non parallelogrammum. 34 d I.*

Superest è qua
drangulis tra-
pezium. Eucli-
des postulat
hanc fabricam
trapezium tan-
quam mensu-
lam vocari: &
sane nominis
ejus ratio geo-
metrica nulla
est. Exempla fi-
guræ & mensu-
ræ ita sunt. Er-
go triangulata quadrangula ejusmodi sunt.

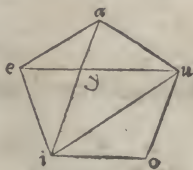


11. *Multangulum est quod pluribus quam quatuor lineis rectis comprehenditur. 23 d I.*

Hoc generali nomine reliqua omnia figurarum deinceps rectilinearum genera Euclides complexus est, ut sunt quinquangulum, sexangulum, septangulum, & deinceps pro numero angulorum innumerabilia. In quolibet autem multanguli genere unum ordinatum esse prædiximus, ut quinquangulum ordinatum, sexangulum ordinatum, & sic in aliis. De quibus omnibus separatim quod hic percipi possit, nihil animadverti, nisi unum de quinquangulo, quod adjungemus, reliquis in adscriptionem reiectis.

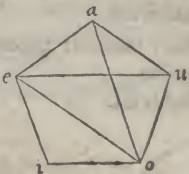
12. *Si quinquangulum æquilaterum tribus angulis æquatur, est æqui-angulum. 7 p 13.*

Ut in æquiquinquangulo tres sunt anguli ad a, e, i , æquales dico & reliquos, & reliquos ipsi æquari: $c\delta$, $ne\delta$ $atureu$, ai , iu . Hic triangula a $e i$ & $e a u$ per thesim perque 2 &



1 e 7 æquilatera & æquiangula, & bases ai & eu æquantur, & anguli eai , aeu æquantur

æquantur: item aen & cia . Itaque ay & ye æquantur per 10 & 6, item reliquum
 y & reliquum y æqua-
 tur cum ab æqua-
 libus æqualia sub-
 lata sint: æquan-
 tur etiam per the-
 sim & 10 & 60 & 10
 011: quare terni æ-
 quantur, totusque
 ideo angulus ad n
 æquatur toti angulo ad i , proindeque æqualibus. Dico insuper angulum ad e
 similiter æquari, si connectantur oa & oe : ut hic.



Nam

terni

simili-

terre-

deunt

æqua-

les.

Quod

si an-

guli tres non deinceps æquantur: ut aio , facilius etiam res erit: ut hic.

Nam ena &

eo i anguli

æquantur

per thesim,

interioresq;

eon & eno .

Itaque toti

ex binis æ-

quantur. De

reliquo ad e idem erit, si connectatur iu , ut hic: toti enim ex binis æquabuntur.

Triangulata multangula e suis item triangulis mensuram capiunt.

ut hic,

quin-

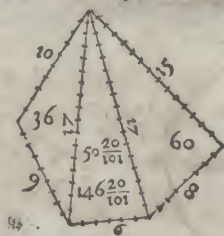
quan-

gulum

e trian-

gulis

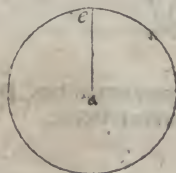
tribus.



Adhuc rectilineorum geometria fuit: sequitur geometria obliquilineorum, è quibus præcipuus est circulus.

1. *Circulus est planum rotundum. è 15 d. 1.*

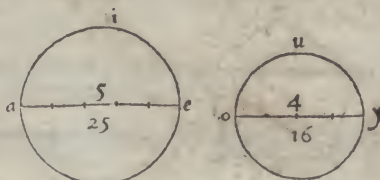
Ut hic vides rectilineum
3 e 6 definitur planum
rectis lineis comprehen-
sum, & ita potuit circulus
definiti planum periph-
eria comprehensum:
sed rotundius est hoc mo-
do & brevius, ut postea
in spherico & sphaera. De



scribendi vero circuli circinus idē artifex est qui fuit peripherie: sed illic motus pū
cti in extremo radio peripheriam lineantis consideratus est: hic consideratur
motus radii totam aream radiantis. Circulus Aristoteli 6 cap. 3 Rhetoric. est pla-
num à medio æquale, quod eodem quidem redit, sed à medio æquari commu-
ne est etiam sphaera. Circulus vero est ordinatissimus planorum, ut antea pa-
tuit 7 e 4.

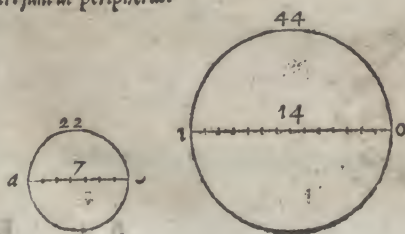
2. *Circuli sunt ut à diametris quadrata. 2 p 12.*

Circuli enim sunt pla-
na similia & eorum la-
tera homologa diame-
tri, ut prædictum est 15
e 4: ideoque per 1 e 6,
ut à diametris quadra-
ta: quæ nempe dupli-
cata ratio est homolo-
gorum laterum: Ut hic
circulus *a c i* ad circulum *o u y*, ut 25 ad 16 quadrata à diametris 5 & 4. De Eu-
clidea demonstratione propositionis hujus erit in scholis



Diametri sunt ut peripherie.

Est
Pappi
th. 5 l
11 &
26 th.
18, ut
hic vi-
des in
4 e, 10.



3. *Geome-*

3. Geometria circularis est in lineis aut in segmentis circuli.

Partitio hac de rebus subiectis utrumque sumitur ad materiam confusorem aliqua luce separandum, & quidem de lineis, consideratio secantium hic prior est, & primo inscriptarum.

4. Si recta duobus in peripheria punctis terminetur, cadet intra circum. 2 p 3.

Ut hic 4 e,

quia intra eadem puncta recta brevior est, quam peripheria per 5 e 2.

Hinc sequitur infinita

sectio, de qua c 5 e 1. Hac igitur propositio docet quomodo recta sit inscribenda circulo, sumptis nempe duobus in peripheria punctis.

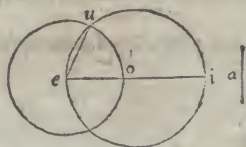
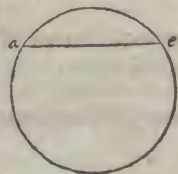
5. Si a termino diametri ex eaque radio aequante datam rectam peripheria describatur, recta a dicto termino in concursum peripheriarum inscribetur dato circulo aequalis data recta. 1 p 4.

Ut sit data a & ab extremo e diametri ei & ejus parte eo aequante datam a peripheria describatur eu, recta eu a dicto extremo e ad u concursum peripheriarum inscribetur dato circulo per 4 e a, qualis data, quia aequatur ipsi eo per 3 c 5 e 5, cum sit radius peripherie ejusdem. Atque hac propositio docet quomodo recta data sit inscribenda circulo aequalis data. Inscriptarum porro coryphea est diameter: ostendit enim centrum, ostendit rationem omnium inscriptarum. Itaque diametri circularis inventio primum generisque doceatur.

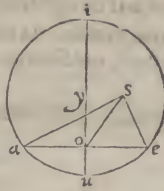
6. Si inscripta recta bisecat inscriptam, est diameter circuli, ejusque medium est centrum. 1 p 3.

Ut sit inscripta a e & inscripta i o u recte ipsam bisecans in o. Dico bisecantem esse diametrum & centrum esse ejus medium, ut in x. Causa eadem quae 3 e 11, quia bisecta est pro latere inscripti rectanguli & subtendit bisectam peripheriam, quibus opposita & inscripta & peripheria perinde bisecantur: ideoque recto bisecans est diameter rectanguli, circularis autem diametri medium centrum esse patet e 2 c 5 e 5 & c 17 e 4. Euclides impossibile quam causam maluit &

ita co-



ita cogit. Nam si
y non est centrum,
sed s, pars æquabi-
tur toti. Nam tri-
angulum a o s tri-
angulo e o s æqui-
laterum erit: æquā-
tur enim a o & o e
ex thesi, item s a &



s e radii, & s o communis est. Itaque per i e 7 anguli deinceps ad o æquantur, &
per s e 5 sunt recti. Rectus igitur est s o e: equalis itaque per thesim recto y o e, pars
toti. Quare non est centrum, itemque accidet de reliquis punctis extra y. Itaque
1. Si duæ rectæ duas inscriptas recte bisecent, concursus bisecantium erit centrum circuli.
è 25 p 3.

Ut hic a e & i o bisecent
rectas u y & y s. Antea e-
nim patuit a & z c 5 e 4
centrum esse in diame-
tro & in concursu dia-
metrorum. Centrum igi-
tur dupliciter invenie-
tur & è medio diametri,
& è concursu diame tro-
rum in medio bisecarum: concursu hic nil opus est, plurius diametrorum u-
nica satis est diameter.



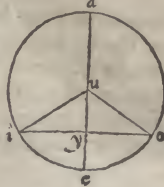
2. Peripheriam ducere per tria puncta in rectam minime cadentia.

Ut
hic
per
a, e,
i.



7. Si diameter bisecat adiametrum, recte secat: & contra. 3 p 3.

Ut dia-
meter
a e bise-
cet adi-
ame-
trum i
o, &



¶

in radii ui & uo . Causa item est quæ 3 e 11.

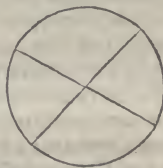
8. Si diametri intersecantur, segmenta sunt inæqualia. 4 p 3.

Confectarium
est 17 e 4. Nam
si inscriptæ essent
bisectiones, essent dia-
metri contra the-
sim. Sed ratio est
in partibus inscri-
ptarum, proportio
in iisdem partibus sequitur.



9. Si duæ inscriptæ intersecantur, rectangulum è segmentis unius æ-
quatur rectangulo è segmentis reliquæ. 35 p 3.

Si intersecantur sint diametri patet proportio, ut in prima figura. Nam rectan-
gulum è segmentis unius æqua-
tur rectangulo è segmentis reli-
quæ, cum sint ambo quadrata la-
terum æqualium. Si non sint dia-
metri, sunt ad diametri ae & io : di-
co oblongum ex au & ue æquari
oblongo ex ou & ui . Sint enim ra-
dii ex y centro ye & yi utriuslibet
quadrato utrumque æquabitur
rectangulum è segmentis. Nam per e cadat diameter yu in punctum commu-
nis sectionis u , suntque perpendiculares ys & yr . Hic per 3 e 11 inscriptæ secan-
tur æqualiter in punctis r & s , & inæqualiter in puncto u . Itaque per e e 13 ob-
longum ex ou & ui cum quadrato su æquatur quadrato si , & addito communi
 ys ; oblongum idem cum quadratis us & sy , id est per 5 e 12 cum quadrato yu
æquatur quadratis is & sy , id est per 5 e 12 quadrato iy , id est per 3 e 12 ye ,
cui per eandem causam patet oblongum alterum cum quadrato yu æquari.
Tollatur utrinque quadratum yu , oblonga igitur æquabuntur eidem, ideoq;
inter se. Atque hæc comparatio de partibus inscriptarum. Sequitur ratio inte-
grarum inscriptarum, quam diameter una totam facit.



10. Inscriptæ æquidistant à centro, in quas à centro perpendiculares
sunt æquales. 4 d 3.

o Ut pa-

ut patet
in proxima
figura
de lineis ae
& io , in
quas à cen-
tro $\#$ perpẽ-
diculares
 uy & us
sunt æquales.



II. Si inscriptæ sunt æquales, æ quidistant à centro: & contra.

14 p 3.

Diametri in eodem circulo per 17 e 4 sunt æquales & à centro æqualiter distant, cum sint per centrum, vel potius nihil omnino distant, reliquæ inscriptæ judicantur æquales, majores, minores à diametro vel diametri centro. Euclides superius illud principii loco postulavit, duo sequentia præsentis elementi, ut demonstrabilia proposuit, cum tamen per se clariora sint & evidentiora. Demonstrationem Euclidis de prima parte si quis requirat, hæc est, converso tamen modo. Sinto primum ae & io æquales, dico æquidistare à centro. Ducantur enim perpendiculares uy & us , ductæ bisecabunt datas per 3 e 11 & ya & si æquabuntur, quia dimidia sunt æqualium. Sinto nunc radii ua & ui eorum quadrata per 5 e 12, æquantur binis quadratis crurum quæ bina, ideo æquantur, tollantur ab æqualibus quadrata ya & si , relinquentur æqua yu & us , latera quæ ideo æqua per 2 e 12. Conversa similiter patet. Nam data perpendiculares bisecant & dimidia ut prius æqualia.

12. Inscriptarum inæqualium diameter est maxima, diametroque propior major remotiore, remotissima minima, minimaque propior minor remotiore, duæque utrinque à diametro sola æquantur. e 15 p 3.

Hic partes quinque sunt, prima diameter est maxima, secunda diametro propior est major, tertia remotissima minima: quarta minima propior minor: quinta, duæ utrinque æquales, quæ omnes patent ex eodem illo æqualitatis argumentum, id est centro decrescendi principio, & crescendi fine. Nam quo magis à centro receditur, aut ad cætrum acceditur, tanto minor aut major efficitur inscripta. Euclidis autem conclusio est per triangula de duobus lateribus majoribus reliquo, deque majore angulo. Prima pars sic patet, quia diameter ae æquatur il & io , radiis nempe & majoribus per 7 e 6, quam io , & sic deinceps. Secunda pars de propiore patet per 4 e 7, quia triangulum ilo triangulo uly æquicrurum majus est angulo: Ergo & basi. Tertia quæ



tet per

tet per secundam partem. Nam si præter is & sr statuatur æqualis tertia, erit eadem etiam inæqualis, quia diametro propior & remotior.

13. Rectarum à diametri puncto non centro in peripheriam, quæ per centrum, est maxima, propiorque maxima est major remotiore, reliqua maxima minima, minimaque propior minor remotiore: duæque utrinque à maxima vel minima sola æquantur. 7 p 3.

Prima pars de ae & ai patet, ut antea per 7 e 6, secunda de ai & ao , item de ao & au per 4 e 7. Tertia ay est minor quam au , quia sy æqualis ipsi su minor est rectis sa & au per 7 e 6, & sublato communis a , relinquitur ay minor quàm au . Quarta pars est tertia sequitur. Quinta sic est:



fit: sr æquans angulum a sr angulo asu , bases au & ar æquabuntur per 2 e 7. His si tertia ponatur æqualis, ut al , sequeretur per 1 e 7 angulum totum lsa particulari rsa æquari, atque è quinta parte consecutarium est.

Itaque

Si punctum in circulo est terminus trium rectarum in peripheriam æqualium, est centrum circuli. 9 p 3.

Secus à puncto diametri non centro non solum duæ utrinque æquarentur. Nam per quod libet punctum diameter agi potest.



Tale etiam fuit antea in quinquantulo: si tres anguli sunt æquales, omnes sunt æquales. ita in circulo: si tres ab eodem puncto rectæ in peripheriam æquantur, omnes æquantur.

14. Rectarum à dato extra puncto in concavum peripheriæ, quæ per centrum, est maxima, propiorque maxima est major remotiore: in convexum, segmentum maxima est minima: minimaque propior minor remotiore, duæque utrinque à maxima vel minima sola æquantur. 8 p 3.

o 2 Demone

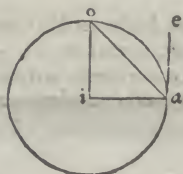
De
mon-
stratio
similli-
ma su-
perio-
ri de
quin-
que
parti-
bus.



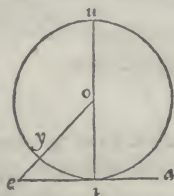
Atque hæc de secantibus, sequitur de tangentibus.

15. Si recta est perpendicularis extremae diametro, tangit peripheriam.
& contra. é 16 p 3.

Postulandum hoc fuerat ex ipsa perpendiculari definitione, quia si magis hæc propenderet, secaret, nec esset perpendicularis. Euclides tamen ita cogit. Secus esto recta ae perpendicularis diametro ai , & recta ab o cum cetro i cadat intra ad o & connectatur oi . Hic in triangulo aoi duo anguli contra 9 & 6 recti essent ad



a per
thesim
& o per
10 & 6.
Super
est de-
mon-
stratio
conver-



sæ simillima antecedenti. Nam si ae tangens non est perpendicularis diametro io , ducatur à centro o perpendicularis oe , tum angulus oei erit rectus, & oie acutus. Idcoque per 11 & 6 oi id est oy , major erit, quam oye , id est pars, quam totum.

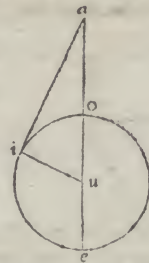
1. Si recta est per centrum & contactum, est perpendicularis tangenti. 18 p 3.

2. Si est perpendicularis tangenti, est per centrum & contactum. 19 p 3.

Nam recta vel à centro in contactum vel à contactu in centrum est pars dia-
metri.

3. Punctum

Si secans transit per centrum, res expeditior est, ut hic a secet, ai tangat, exterius segmentum est ao & centrum u. Jam ui erit perpendicularis tangenti per i c 15 e, tum per 7 e 13, oblongum ex ea & o a cum quadrato ou, id est iu aequatur quadrato au, id est per 5 e 12 quadratis ai & i u. Commune iu tollatur, aequabitur rectangulum quadrato tangenti. Si secans non transit per centrum: ut in hac figura, centro u per se reperio, iu per i c 15 e erit perpendicularis tangenti ai, tum ducatur aa & uo, & perpendicularis uy biseccas o e per 7 e. Hic per 7 e 13 oblongum ex ae & ao cum quadrato oy aequatur quadrato ay. Itaque communi addito y u idem oblongum cum quadratis oy & y u, id est per 5 e 12 cum quadrato ou aequatur quadratis ay & uy, id est per 5 e 12 au, id est rursus ai & iu. Denique tollantur utrinque quadrata aequa uo & ui, relinquetur oblongum aequale quadrato tangenti. Conversa similiter demonstratur in hac figura. Esto rectangulum ex ae & ay aequale quadrato ipsius ai. Dico ai tangere. Ducatur per i e tangens ao, item sint au, ui, uo.



Hic oblongum ex ea & ay aequatur quadrato ao per 17 e, & quadrato ai per thesim. Itaque ai & ao sunt aequales. Tum uo per i c 15 e est perpendicularis tangenti: Hic triangula auo & au i sunt aequilatera, & per i e 7 aequiangula: angulus autem ad o rectus est, rectus igitur & e i aequalis ad i per e s e 3. Quare ai est perpendicularis extremae diametro, & per 15 e tangit. Itaque



1. Tangentes ab eodem puncto sunt aequales.

Quia ipsarum quadrata eidem oblongo aequantur.

Et

2. Oblonga e qualibet ex eodem puncto secante & secanti exteriori segmento aquantur inter se.

Quia

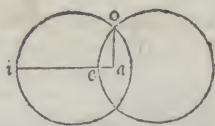
Quia æquantur eidem. Campanus ad 36 p 3.

3. Datis duabus rectis licet alteri continuare tertiam, ut oblongum ex continuata & continu-
atione equetur quadrato reliquo.

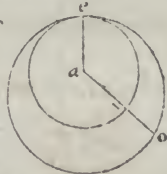
Vitellio 127 p 1. Ut in prima figura, si prima è datis sit eo , secunda ia , tertia
 oa . Superest geometria circularis de peripheriis intersectis & contiguis, deq;
rectis & peripheriis.

18. Si periphæria sunt intersectæ vel contiguae sunt eccentricæ: illæque
duobus tantum punctis interfecantur, hæc diametros per contactum con-
tinuant. 5. 6. 10. 11. 12 p 3.

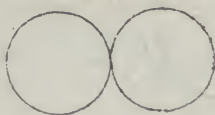
Hæc o-
mnia po-
stulari
poterāt:
demon-
stratio.



nes autem habent ex impossibili non difficiles. Prima pars patet, quia pars æ-
quaretur to-
ti, si centrum
esset idem ut
 a . Nam duo
radii commu-
ni radio ao æ-
quantur, ide-
oque inter se

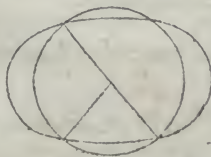


æquantur a & ai pars toti. Secunda pars ut prima demonstratur: secus pars
æquare-
tur toti:
ut hic æ-
quantur
radii mi-
noris pe-



riphæria ae & ai : item majoris ae & ao . Quare ai æquaretur ipsi ao pars toti. Si
periphæria sint foris contiguae, res expeditior est, neque demonstrationem Eu-
clidis iudicio meruit, ut hic.

Tertia pars pa-
tet è prima: secus
intersectæ essent
concentricæ. Nam
per s e centro in-
vento, & per z c s
e tribus rectis ad

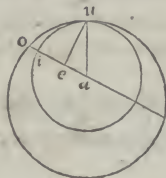


tria se-

tria sectionum puncta ductis à centro, radii tres essent æquales. Ut hic

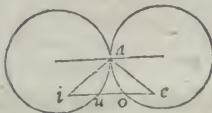
Quarta pars eodem modo demonstratur, quia secus pars esset maior toto:

Ut hic. Esto namque per centra a & e recta $aeio$. Hic tri anguli uea duo latera ue & ea per $7c6$ sunt maiora quam ua , ideoque quam ao : tollatur ae , reliquum ue ,



majus erit quam eo . At e æquatur ipsi e . Quare e i majus est quam eo pars toto. Idem erit si radius sit extra.

Ut hic. Nā per $7c6$, ea & ia maiora sunt quam ie . At eo



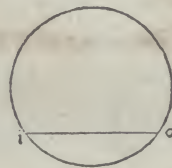
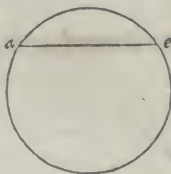
& iu æquantur ipsi ea & ia . Quare eo & iu sunt majores quam ipsa ie partes toto. De rectis & peripheriis simul una ratio est.

19. Si inscriptæ sunt æquales, secant peripherias æquales: & contra.

28.29 p 3.

Res con

stat *ἴσα πρὸς ἴσα*, ut in e xēplo: cōgruant enim circumli, tum æquales in scriptæ & peripheriæ congruent.



P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. X V I.

de circuli segmentis.

I. Segmentum circuli est quod comprehenditur extrinsecus a' peripheria, intus a' recta.

Geometria segmentorum communis est etiam sphaeræ, sed modo explicatu difficile est hoc ipsum generale, & segmentum comprehendí intus potest linea obliqua

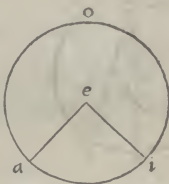
obliqua sive simplici sive multiplici, sed hic usitata sequimur. Itaque dum facilius occurret, utemur Euclide. Primo igitur definitio generalis præponitur ad subiectas species facilius distinguendum.

2. *Segmentum circuli est sector aut sectio.*

Hæc utraque species nominatur in Euclide & definitur speciatim: segmentum autem & sectio & sector nomina pene eadem sunt, definitionibus tamen distinguuntur.

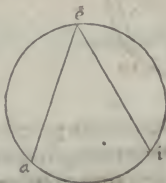
3. *Sector est segmentum intus comprehensum a recta duplici faciente angulum in centro, qui angulus in centro dicitur: ut periphæria dicitur basis sectoris. 9 d 3.*

Ut aei sector est. Hic sector definitur, & ejus rectilineus angulus absolute dicitur angulus in centro. Reliquum autem a sectoris: ut hic aoi dicitur Archimedi sector major, qui tamen in duos sectores interjecto radio secari potest, ut postea secatur in geodæsia sectionis.



4. *Angulus in periphæria est angulus comprehensus a duabus rectis inscriptis, & in periphæria conterminis. 8 d 3.*

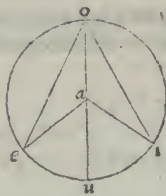
Sector in periphæria dici potuit, intus nempe comprehensus a duabus rectis conterminis in periphæria, ut hic aei. At in elementis neque mentio neque usus talis sectoris est, tamen si angulus ipsius absolute angulus in periphæria dicitur, ut sectoris in centro angulus appellatur angulus in centro.



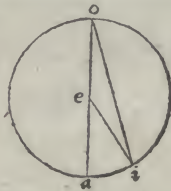
5. *Angulus in centro duplus est anguli in periphæria in eandem periphæriam insistentis. 20 p 3.*

Varietas exempli hic triplex est Euclidi: demonstratio tamen una, ut hic angulus eai in centro, angulus eoi in periphæria duplus probabitur recta *oa* secando *p* te duo

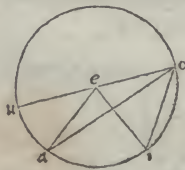
te duo triangula
utrinque æquicu-
ra, & per 10 e 6 ad
basim æquiangu-
la: quorum figil-
latem dupli sunt
anguli, eau ipsius
 coa & iau ipsius
 oa . Nam cum du-



obus interioribus æqualibus æquetur per 2 c 9 e 6, duplus erit alterius. Itaque
totus eai duplus est totius coi . Secundum exemplum sic est ex angulo in cen-
tro aei , & in peri-
pheria aoi . Hic cru-
ra eo & ei per 17 e
4 æquantur, & per
10 e 6 anguli ad o
& i , quibus angu-
lus in centro æqua-
tur per 2 c 9 e 6. I-
taque duplus alte-



rius. Tertium exemplum est ex angulo in centro aei in peripheria aoi & sit dia-
meter ou . Hic angulus totus ieu per 2 c 9 e 6 æquatur interioribus angulis coi
& eio æqualibus
inter se per 10 e 6:
Ideoque duplus
est alterius: Item
particularis $a eu$
æquatur per 2 c 9
e 6 angulis coa &
 $ea o$ æqualibus itē
inter se per 10 e 6.



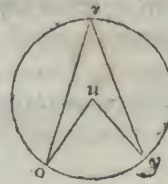
Itaque reliquus $a ei$ est duplus reliqui $a oi$ in peripheria.

Itaque

Si angulus in peripheria æquatur angulo in centro, est duplus basi.

6. Anguli in centro peripheriarumve circulorum æqualium sunt ut pe-
ripheria in quas insistant: & contra. e 33 p 6. 26. 27 p 3.

Hic proportio du-
plex est cum periphe-
ria subjecta angulorū
in centro & angulorū
in peripheria. Sed de
angulis in centro satis
sit explicari. Sinto pri-
mum anguli æquales



in centro

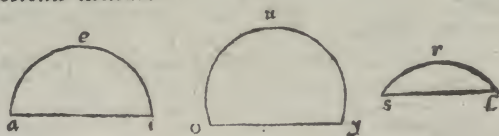
in centro a & i & o & y , bases a & o & y erunt æquales per 7 e 7, & peripheriæ a & o & y per 19 e 15, item æquales. Itaque si anguli sunt inæquales, peripheriæ item tanto inæquales erunt. Idem erit de angulis in peripheriâ. Conversa item vera est, unde etiam sequitur.

Ut sector ad sectorem, sic angulus ad angulum.

Atque hæc de sectore.

7. Sectio est segmentum circuli intus comprehensum ab una recta, quæ basis sectionis dicitur.

Ut
hic,
secti-
ones
sunt
 a & o ,
 u & y .



8 Sectio absolvitur invento centro.

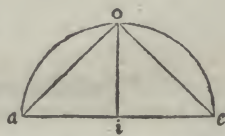
Inven-
tio cen-
tri pa-
tuitur
6 e
5, & sic
vides
hic ab-
solven-
di cir-
culi modum per 6 e 15.



9. Peripheria sectionis bisecatur perpendiculari bisecante basim.

30 p 3.

Ut hic. Ducito rectas a & o & o & e , triangula habebis a & o & e & o per 2 e 7. Itaque bases o & a & o & e æquales & per 19 e 15 æquales peripherias subtenfis. Hic Euclides duas peripherias in unam $\epsilon\pi\alpha\sigma\upsilon\omega\sigma\epsilon\iota$ comprehendit, & nos comprehendimus.



10. Angulus in sectione est angulus comprehensus a' duabus rectis cõterminis basi & in peripheria conterminis. 7 d 3.

Ut a & e in superiore exemplo.

11. Anguli in eadem sectione sunt æquales. 21 p 3.

p 2

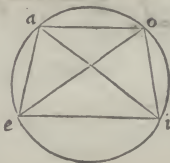
Sectio sit

Sectio sit $ea\delta o$, & in ea anguli ada & u : hi æquantur, quia per 5 e sunt dimidii ad angulum in centro eyo , vel æquantur per 6 e, quia insunt in eadem peripheria. Hic constat angulos in sectione reipsa esse angulos in peripheria basi que tantum diversos.



12. Anguli in oppositis sectionibus æquantur duobus rectis, 22 p 3.

Hic enim anguli oppositi ada & i æquantur tribus unius trianguli eo i æquantibus duos rectos per 9 e 6. Nam i primum æquatur sibi, deinde a per partes æquatur duobus reliquis. Nam ea i æquatur ipse eo i & ia o ipse oe i per 11 e. Itaque oppositi æquantur duobus rectis. Ratio sectionis ita est, similitudo sequitur.



13. Si sectiones capiunt angulos æquales, sunt similes, e' 10 d 3.

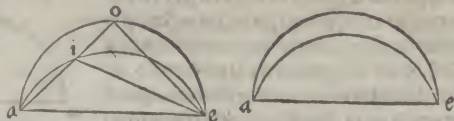
Ut hic aei , & ouy . In definienda similitudine sectionum circularium adhibet Euclides tantum æqualitatem duorum angulorum, ex qua proportio peripheriarum & basium consequitur, ut Pappus ait 13 th. 5 lib. Nec definitio magis hic est, quam e definitione generali consecrarium. Et triangula hic inscripta æquiangulara cum sint ex thesi, etiam per 9 e 7 similia erunt.



14. Si sectiones similes sunt in æquali basi, sunt æquales 23. & 24 p 3.

In prima figura basis eadem esto. Ac si dicantur in æquales sectiones, major que altera

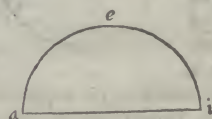
que altera aoe ,
angulus in ea
 aoe minor erit
angulo aie in
minore sectio-
ne per $4c9e6$,



qui tamen per thesim est æqualis: In secunda figura si superponatur sectio secti-
oni congruet, secus contra primam partem, sectiones similes in eadem basi nō
essent æquales. At res *ipagūōri* contenta fuerit: Per superiores autem duas pro-
positiones & per $2c6e15$ licet invenire datæ sectioni similem, vel è dato circu-
lo amputare.

15. *Angulus sectionis est, qui comprehenditur à terminis sectionis.*
7 d 3.

Ut
e a i
&
e i a.



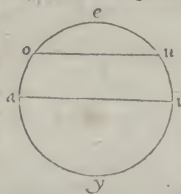
16. *Sectio est semicirculus aut inæqualis semicirculo.*

17. *Semicirculus est sectio dimidia circuli.*

Itaque

Semicirculus comprehenditur à peripheria & diametro. 18 d 1.

Ut aei est
semicirculus:
reliquæ secti-
ones, ut oyu ,
& oeu inæ-
quales, illa
major, hæc
minor.



18. *Angulus in semicirculo rectus est, semicirculi minor recto rectili-
neo, major quovis acuto: in majore sectione est minor recto, majoris ma-
jor, in minore major, minoris minor.* e 31 e 16 p 3.

Septem partes sunt hujus elementi, prima est quod angulus in semicirculo
sit rectus: Ut in aei : nam si radius ducatur oe dividetur angulus aei in duos an-
gulos

p 3

gulos aeo & oei aequales angulis $ea o$ & $ei o$ per 10 e 6: itaque cum sit aequalis reliquis angulis, est rectus per 1 c 3 e 8. Aristoteles hanc geometriam complexus est 2 post, & 9 philosophi & ait angulum in semicirculo rectum esse, quia sit dimidius duorum rectorum, quod eodem redit. Secunda pars quod angulus semicirculi sit minor recto, patet ex eo quia pars est recti. Nam angulus semicirculi aie est pars recti rectilinei aii . Tertia quod sit major quovis acuto: patet per 4 c 16 e 15. Secus enim tangens non esset eadem parte singularis. Quarta pars sic patet. Angulus ad i in maiore sectione aei est minor recto, quia in eodem triangulo aei , qui ad a rectus. Et si crus neutrum sit per centrum, constitui tamen potest angulus aequalis dato in eadem nempe sectione. Quinta sic. Angulus maioris sectionis eai est maior recto, quia continet rectum. Sexta sic. Angulus aoe in minore sectione est maior recto per 12 c 15, quia qui in opposita sectione ad i est minor recto. Septima sic. Angulus $ea o$ est minor recto, quia pars recti nempe exterioris si producat ia .

Atque haec de angulis circuli, quorum omnium efficacissimus est angulus in semicirculo, nec frustra ab Aristotele toties appellatus. Hanc igitur Aristotelis geometriam plenius aperiamus. Hinc enim plurima oriuntur. Itaque

1. Si duae rectae diametro circuli conterminae conterminentur in peripheria, faciunt angulum rectum. Et

2. Si recta infinita secetur a peripheria externi centri in punctis dato & contingente, & diameter sit a contingente, recta a dato puncto connectens diametrum erit perpendicularis super infinitam.

Ut hic recta ae a peripheria aei centri o extra datam secetur in dato puncto a , & in puncto contingente ut in e , & sit ab e diametro eo , recta ai a dato puncto a connectens diametrum ioe erit perpendicularis super infinitam, quia faciet cum infinita angulum in semicirculo. Et



3. Si recta a dato puncto faciens angulum cum infinita, fiat diameter peripheriae secantis infinitam, recta a dicto puncto connectens segmentum erit perpendicularis super infinitam.

Ut in eodem exemplo recta ioe fiat diameter, a cuius bisectione pro centro peripheria secet infinitam, & cetera. Et

4. Si duarum rectarum maior fiat diameter circuli, minorque maiori contermina & inscripta connectatur, maior plus poterit, quam minor quadrato connectentis. ad 13 p 10.

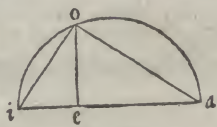
Ut a e

Utae diame-
ter plus potest
quam e i qua-
drato ex ai: re-
ctangulū enim
fiet triangulū a
ei, & per 5 e 12 poterit æquale cruribus.



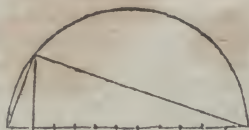
19. Si recta continuata e duabus rectis fiat diameter circuli, perpendi-
cularis a puncto continuationis in peripheriam erit proportionalis inter da-
tas. 13 p 6.

Ut sunt datae ae & ei, e quibus ae i continuata sit, & perpendicularis eo sit in
peripheriam aoi. Hæc erit media proportionalis, quia ductis rectis ao & io tri-
angulum fiet re-
ctangulum, cū
a o i sit angulus
in semicirculo,
& per 1 c 4 e 8 o e
erit proportio-
nalis inter ae & ei. Sic si quadrati decempedalis latus quærat oblongi æqua-
lis ipsi quadrato latera unius pedis & decem pedum continentur, proporti-
onalis media erit latus quadrati.

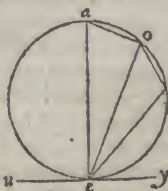


20. Anguli in oppositis sectionibus æquantur alternis angulis secantis
& contigua. 32 p 3.

Ut sunt sectiones ei o, & e a o,
tangens sit u ey, & anguli in op-
positis sectionibus e a o & e i o:
Dico ipsos æquari alternis an-
gulis ex secante & contigua o e y
& o e u: primo qui ad a æqua-
tur alterno o e y, quia & tres an-



gulo o e y, o e a, a e u duobus rectis æquantur per 1 c 8 e 5, quibus item æquantur
tres anguli in triangulo a e o per 9 e 6: a ternis æqualibus
tolle rectos a e u & a o e. Rectus enim est a o e per 18 e, quia
in semicirculo, tollatur & communis a e o, reliqui e a o &
o e y alterni æquabuntur. Secundo anguli ad a & i æquan-
tur duobus rectis per 12 e, quibus æquantur & o e y & o e
u. Atque a o æquatur alterno o e y. Ergo qui ad i æquatur
alterno reliquo o e u. Neque vero interest, utrum angulus
ad a sit ad diametrum. Id enim demonstrandi tantum
caussa statuitur, ubilibet enim fuerit, æqualis erit, nem-
pe in eadem sectione.



Itaque
1. Si ad

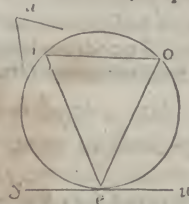
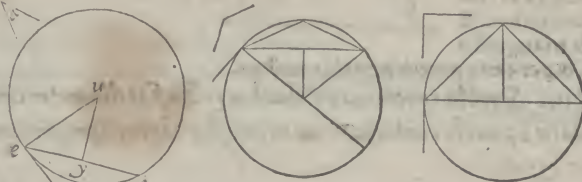
1. Si ad terminum datæ rectæ æquetur angulus rectilineus dato, & ab æquati vertice perpendicularis reliquo lateri concurrat cum perpendiculari à medio datæ, concursus erit centrum circuli per æquatam angulum descripti, in cuius opposita sectione super datam angulus æquabitur dato. c 33 p 3.

Quod in tribus generibus anguli potes experiri eodem semper argumento, ut hic datus angulus a data recta e

i, ad terminum æquaturs angulus i e o, perpendicularis lateri e o sit e u, at à medio datæ sit y u : Hic u erit centrum optatum. Atque hinc licet sectionem describere super datam rectam, quæ capiat angulum rectilineum æqualem dato.

2. Si angulus secantis & contiguae æquetur dato angulo rectilineo, angulus in opposita sectione eidem pariter æquabitur. 34 p 3.

Ut in subiecta figura. Atque hinc licet à dato circulo sectionem secare, in qua sit angulus æqualis dato. Ut sit angulus datus a & circulus e i o, facies ad punctum e ex secante e o & tangente y u angulum æqualem dato per s c o e s, qualis hic sit o e u, tum sectio e o i capiet angulum æqualem dato. Quapropter hæ sunt opes anguli in semicirculo, ab Aristotele indeo tantopere appellati, quibus lubet addere ad extremum quandam singularem & mirificam peripheriæ naturam. Angulus sectionis maioris est maior recto. Angulus sectionis minoris est minor recto. Ecquid (inquies) cur æqualis sectionis vel semicirculi angulus non erit æqualis recto? Euclides nominatim nihil hic respondet, qui tamen dixit ad 16 p 3 angulum semicirculi maiorem esse quovis angulo acuto rectilineo, quod videtur solum recto convenire, ex inæqualitate cum recto definitur obtusus & acutus: Inter obtusum & acutum rectus est. Datur vero in circulo maior recto velut obtusus, datur minor recto velut acutus, datur etiam minor quovis acuto, & maior quovis acuto, ut inter peripheriam, rectamque perpendicularem media recta nequeat intercedere. Ecquid igitur (inquies) restat quin semicirculi angulus rectus sit? Certe rectus est in suo genere, & sic anguli recti dicuntur in sphaera, & medius inter obtusum acutumque sui generis est, & generaliter ita perpendiculum definitum nobis est 12 e 2. Angulus rectus ita definitus 8 e 3. Mirabile itaque sit angulo nihil addi posse, quo maior acuto fiat, & tamen maiorem esse, cui nihil præter unicam lineam accessit. Datur majus, datur minus, cur non datur æqualer & quidem datur id inter quod & æquale, ne recta quidem possit intercedere. Angulum tamen rectum rectilineum maiorem esse recto circulari, geometria con-



tria convincit. Datur igitur in circulo ratio inaequalitatis majoris & minoris, non datur ratio aequalitatis. Sed multo mirabilius fuerit illud e ratione inscriptarum, quod datur ratio aequalitatis majoris minorisque inaequalitatis, non datur tamen proportio, de quo erit in scholis.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XVII.

de adscriptione circuli & trianguli.

Geometria plani rectilinei & circuli adhuc fuit: sequitur utriusque ascriptio: quae primo libro generaliter definita est: peripheria vero circuli est ipsius terminus. Itaque rectilineum inscribitur circulo, quando peripheria tangit angulos, 3 d 4: Circumscribitur cum a singulis lateribus peripheria tangitur: 4 d 4.

1. Si rectilineum ascriptum circulo est aequilaterum, est equiangulum.

De inscripto patet, & quidem de triangulo per se, quia si est aequilaterum, est aequi angulum

per 2 c 10 e 6.

In triangulato

autem res de-

monstrata est.

Ut hic si inscri-

pta ou & sy sint

aequales, sub-

tendent peris-

phas aequa-

les per 19 e 15:

tum si mediam peripheriam inter utramque omittas, ut hic uy

& reliquam ois addas utrique, tota ois subten-

sa angulo ad y aequabuntur. Itaque anguli in peripheria, insistentes in periphe-

riis aequalibus aquantur. De inscripto item verum, si circumscriptus circu-

lus intelligatur. Perpendiculares enim a centro a in latera circumscripti per

5 e 12 facient triangula utrinque aequilatera & aequiangula ductis in angulos

radiis, ut in eodem exemplo.

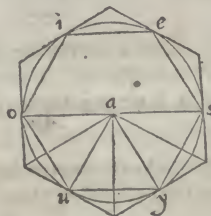
Et

2. Aequatur triangulo aequalis, basis quidem perimetro, altitudinis autem perpendiculari

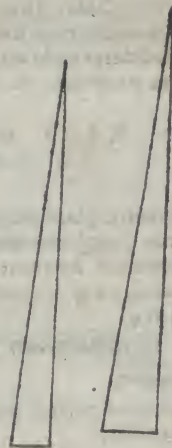
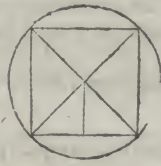
a centro in latus.

Ut hic patet per 1 c 6 e 7. Tria enim sunt triangula in uno triangulo aequal-

q ta. Idem



ta. Idem
erit de
triangu-
lato, ut
hic in
quadra-
to: qua-
tuor e-
nim tri-
angula
fient æ-
quealta:
Deniq;
rectili-
neum
quodli-
bet æqui-
laterum
adscri-

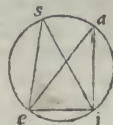


ptum circulo æquabitur triangulo basis æqualis perimetro ipsius adscripti, quia perimenter continet bases triangulorum, in quæ rectilincum resolvitur.

3. *Rectilinea similia circulis inscripta, sunt ut à diametris quadrata.*

Ip 12.

Quia per 1 e 6 plana similia habent duplicatam rationem homologorum laterum. At in rectilineis inscriptis diametri sunt homologa latera vel sunt proportionales lateribus homologis. Ut sunt rectangula triangu-
gula similia $\triangle e i$, $\triangle o u y$, quia $e e$ & $o u$ sunt diametri, res protinus patet. At in triangulis obliqua-
gulis $\triangle e i$ & $\triangle u y$ similibus diame-
tri sunt proportionales homo-
logis lateribus, nempe $e i$ & $u y$.
Nam ex thesi ut e ad $r u$, sic $e i$
ad $u y$: & ideo ex præcedenti ut
diametri $e a$ & $u o$. In triangulatis similibus, cum per 2 e 10 resolyentur in trian-
gula similia, idem erit.



Itaque
Si sit ut diameter circuli ad latus rectilinei inscripti, sic diameter secundi circuli ad latus secun-
di rectilinei inscripti, triangulæque inscriptorum singularia similia similiterque sita, rectilinea in-
scripta erunt similia similiterque sita.

Id Euclides sic sumpsit ad 2 p 12, & quidem ut videtur è 18 p 6: & nos ideo as-
umpimus. Adscriptio circuli est cum triangulo quolibet: cum triangulato
autem

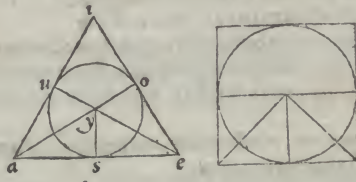
autem duntaxat ordinato, & quidem adscriptio circuli est communis.

4. Si duæ rectæ bifecent duos angulos dati rectilinei, circulus radii ab earum concursu in latus perpendicularis inscribetur dato rectilineo.

4 p 4.

Ut in triangulo aei , rectæ ao & eu bifecent angulos, & ab earum concursu y sunt perpendiculares yo , yu , ys ,

dico centro y radio yo vel yu vel ys describi circum-



lum per e & i , quia bifecantes cum perpendiculis faciunt tri-

angula æquilatera per 2 & 7 , ideoque tres perpendiculares, quæ sunt bases æ-

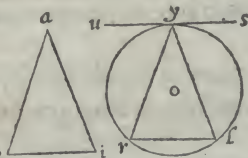
quilaterorum æquales erunt. Idem argumentum erit de triangulo.

5. Si duæ rectæ recte bifecent duo latera dati rectilinei, circulus radii ab earum concursu in angulum circumscribetur dato rectilineo. 5 p 4.

Ut in superioribus figuris. Demonstratio est eadem superiori: Tres enim radii per 2 & 7 æquantur, & concursus per e & i est centrum. Atque hæc communis est adscriptio circuli, sequitur adscriptio rectilinei, & primum trianguli.

6. Si duæ inscriptæ à contactu rectæ & peripheriæ æquent duos utrinque angulos duobus angulis dati trianguli, connexæ inscribent triangulum dato circulo æquiangulum dato triangulo. 6 p 4.

Detur triangulum aei & o circulus cui inscribendum sit triangulum æquiangulum dato. Tangat igitur recta uy s peripheriam yr l, & à contactu y inscrip-
ta yr & yl æquent cum tangente angu-
los uyr , sy l angu-

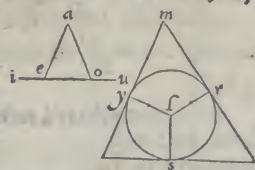


lis aei & aie , & connectatur rl , æquabunt per 17 & 16 angulos alternorum segmentorum angulis uyr & sy l. Itaque per e & 7 cum binis æquantur, reliquus æquabitur reliquo. Circumscriptio hic etiam specialis est.

7. Si duo anguli in centro dati circuli æquantur ad commune latus exterioribus angulis dati trianguli, rectæ tangentes peripheriam in cruribus angulorum circumscribent triangulum dato circulo æquiangulum dato triangulo. 3 p 4.

q 2 Est

Esto triangulum, & in eo exteriores anguli $a e i$ & $a o u$: circulus autem $y s r$, & in centro l aquantur anguli $y l r$ & $s l r$ ad commune latum $l r$ angulis exterioribus $a e i$ & $a o u$. Dico angulos circumscripti trianguli aequari angulis dati trianguli: Nam quadranguli $y l r m$ quatuor interiores aquantur quatuor rectis per q e 10 , duoque $a d y$ & r sunt recti per fabricam ex secante & contigua a contactu per centrum per 1 c 15 e 15 . Itaque reliqui $a d l$ & m aquantur duobus rectis, quibus aquantur $a e i$ & $a o u$: At angulus $a d l$ aequatur exteriori, reliquus igitur $a d m$ aequatur reliquo $a e o$. Idem erit de angulis $a o e$ & $a o u$. Itaque cum binis aequalibus reliqui $a d a$ & i aequabuntur. Itaque



Si triangulum est rectangulum, obtusangulum, acutangulum, centrum circumscripti circuli est in latere, extra latera, intra latera: & contra.

Ut

videtur
in
tribus
sub-
je-
ctis
figuris centrum a .



P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. X V I I I.

de adscriptione triangulati.

A Tque hac trianguli est adscriptio. Triangulati ordinati adscriptio doceatur, & primum circumscriptio communis ex antecedente tamen inscriptione hoc modo.

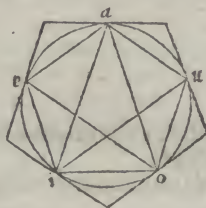
1. Si recte tangant peripheriam in angulis inscripti triangulati ordinati, circumscribent triangulatum circulo homogeneum inscripto triangulato.

Exempla per species inscriptorum proponuntur: specialis itaque inscriptio dicatur, & quidem per unicum latus, quod repetitum, quoties opus est, peripheriam compleat. Id enim fecit Euclides in uno quindecangulo, nos in omnibus faciemus.

2. Si diametri recte intersecentur, subtenfa recto erit latus quadratum. e 6 p 4 .

ut hic.

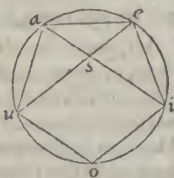
duæ rectæ bisecantes inscripti trianguli utrumque angulum duplum reliqui cōnectantur, & inter se & cum angulis inscribent circulo quinquangulum æquilaterum, cujus unum latus erit ipsa basis. Ut hic cum anguli coa , coi , uio , uia , iao æquantur in peripheria, subtensa peripheriæ per 6 e 16 æquantur, ideoq; per 19 e 15 subtensa ae , ei , io , ou , ua : & ex istis quinque lateribus unū



est ae . Ergo recta proportionaliter secta ita quinquanguli adscriptionem machinatur, indeque vicissim redditur linea proportionaliter secta.

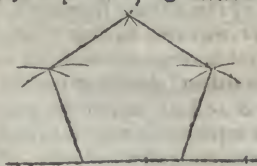
4. Si duæ rectæ subtendunt duos deinceps angulos inscripti quinquanguli, secantur proportionaliter, & majora segmenta sunt latera inscripti. ex 8 p 13.

Ut hic sunt rectæ ai & eu subtendentes angulos aei , & eau , dico eas proportionaliter secari in puncto s , & majora segmenta æquari lateri quinquanguli. Hic enim bina triangula sunt æquiangula: primo aei & uei per thesim & 2 e 7. Itaque anguli aei & ues æquantur: deinde aei & ase , quia angulus ad a communis est, reliquus igitur reliquo æquatur per 3 e 7. Jam per 9 e 7, ut ia & ae , id est ut mox patebit ad is , sic ea ad as . Itaque per 1 e 14 secatur ia proportionaliter: ea autem latus æquatur is , quia utraque æquatur lateri ei , illa per thesim, hæc per 10 e 6. Anguli enim ad basim ise & ies æquantur ejusdē nempe duplicia: quia ise per 3 e 9 e 6 æquatur duobus interioribus æqualibus angulo ad u per 10 e 6 & proximam conclusionem. Itaque duplus est anguli aes , cujus etiam duplus est angulus uei per 6 e 16, insitens nempe in dupla peripheria. Atque hinc patet fabrica quinquanguli ordinati super datam rectam. Itaque



Si data recta secta proportionaliter continuetur utrinque majore segmento, sexque peripherie radio date concurrant, binæ utrinque a terminis date & continuatæ, duæ reliquæ ab earum concursu, rectæ per cōcursus & terminos date constituent super datam quinquangulum ordinatū.

Exē-
plū
sic
est.



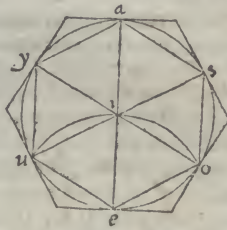
5. Si dia

5. Si diameter circuli quinquangulo circumscripti est rationalis, est irrationalis ad latus inscripti quinquanguli. è 11 p 13.

Sic antea segmenta rectæ proportionaliter sectæ irrationalia fuerunt. Reliqua deinde triangulata multiplicata à laterum ternario, quaternario, quinario pos sunt inscribi circulo per inscriptum triangulum, quadratum, quinquangulum. Itaque per triangulum inscribetur triangulatum angulorum 6. 12. 24. 48: per quadratum inscribetur triangulatum angulorum 8. 16. 32. 64: per quinquangulum inscribetur triangulatum angulorum 10. 20. 40. 80. & sic deinceps.

6. Radius circuli est latus inscripti sexanguli. è 15 p 4.

Sexangulum inscribitur per triangulum æquilaterum inscriptum bisectis tribus angulis, sed brevius inscribitur per radium sexies deinde inscriptum: Ut in dato circulo sit diameter ae , & centro e radio ie describatur peripheria uio , & à punctis o & u sint diametri oy & us , hæ connectæ & inter se & cum diametro ae inscribent sexangulum æquilaterum dato circulo lateris radio æqualis: ut eu æquatur ipsi ui , quia ambæ æquantur eidem ie per c 17 e 4. Itaque eiu est æquilaterum triangulum, & similiter io æquilaterum, angulique in centro sunt $\frac{2}{3}$ recti, ideoque æquales, & per 1 e 8 e 5 angulus sio est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum, & per 2 e 8 e 5 anguli ad verticem item æquales. Quare sex sunt æquales, & ob id per 6 e 16 & 19 e 15 bases omnes æquales, & inter se, & ut jam patuit, radio dati circuli. Inscriptum est igitur sexangulum è radio circuli æquilaterum, & per 1 e 17 æquiangulum.



Itaque

1. Sexangula tria ordinata complent locum.

Ut hic. Sex enim triangula sunt æquilatera resolutis sexangulis in sex triangula, vel quia quilibet angulus ordinati sexanguli valet rectum & $\frac{1}{3}$ recti. Itaque triplex angulus sexanguli valet $\frac{1}{3}$ recti id est quatuor rectos. Præterea vero nulla è planis figura complet locum. Quinquangulum non complet: Triplex enim ejus angulus faceret tantum rectos $3\frac{2}{3}$: quadruplex faceret $4\frac{2}{3}$, quod amplius & majus est. Septanguli angulus duplex faceret tantum rectos $2\frac{2}{3}$: triplex $3\frac{2}{3}$ id est $4\frac{2}{3}$ quod plus est, & sic deinceps inducenti constabit tribus tantum planis ordinatis compleri planum locum.



Et

2. Si rectæ ab uno inscripti sexanguli angulo in tertium utrinque angulum connectantur, inscribent triangulum æquilaterum dato circulo.

Ut hic,

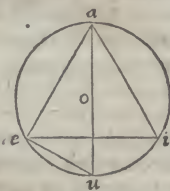
ut hic, quia
latera erunt
subtensa pe-
ripheriis æ-
qualibus. Ita-
que per 19
e 15 equalia,
& vicissim
per tale tri-
angulum bisectionis angulis sexangulum inscribitur.



7. *Latus inscripti trianguli æquilateri potest triplum circularis radii.*

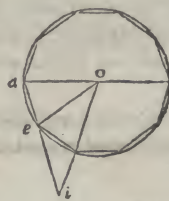
12 p. 13.

Ut hic trianguli aei uno latere ae duæ tertiæ semiperipheriæ occupantur: Nā uno latere occupatur una tertia totius peripheriæ eu , ideo est tertia reliqua, id est sexta totius peripheriæ. Itaque eu inscripta est radius per 6 e. Jam diameter aoi per 7 e 12 potest quadruplum radii, id est ipsius eu & per 18 e 16 & 5 e 12 quadruplum idem possunt ae & eu : tolle eu latus ae poterit triplum radii. Atque hæc de sexangula figura, id est apum geometria. Apis enim (ut ait Varro de rerustica lib. 13 cap 16) sexangulam cellam sibi architectatur, quot habet ipsa pedes, quod geometra *ἑξάγωνον* fieri in orbi rotundo ostendunt, ut plurimum loci includatur, quod idem Pappus & geometrice & copiose demonstrat in proœmio quinti libri. Reliquis multangulis & eorum multis opus esset triangulo utriusque ad basim anguli ad reliquum tripli in septangulo, quadrupli in nonangulo, & sic deinceps: in cuius inventione veteres geometra elaborarunt. Quidam (inquit Proclus ad 9 p 1) ab Archimedis helicibus incitati in datam rationem datum angulum rectilineum secuerunt, quorum considerationes iis qui instituuntur contemplatu difficiles, cum sint in præsentia omittimus. Hæc ille. Geometricos autem conatus illos libuit curiosorum gratia in scholis proponere.



8. *Si latus sexanguli secetur proportionaliter, majus segmentum erit latus decanguli.*

Pappus lib. 5 th. 24. & Camp. ad 3 p 14. Secetur enim ao radius seu latus sexanguli per 3 e 14 proportionaliter, & sit ae æqualis majori segmēto. Dico ae latus esse decanguli: Nam si continuetur deinde toto radio in i tota aei per 3 e 14 secabitur proportionaliter, & majus segmentum e erit ipse radius. Nam si recta ie a secā est proportionaliter, est ut ia ad ie , id est oa nempe ad radium, sic ao ad ae . Itaque per 11 e 7 triangula iao & oae sunt æ-



quian

quiangula, & angulus aoe æquatur angulo oia . At angulus uo est quadruplus anguli aoe : æquatur enim duobus interioribus ada & e per $2c9$ & 6 æqualibus inter se per $3c5$ & 5 & per $10c6$, & ideo duplus est ipsius aoe dupli per eandem causam ipsius ao æqualis ipsi aoe . Itaque uo est quadruplus ipsius aoe : Itaque a est quadrupla peripheriæ ea . Ergo tota uea est quintupla ipsius ea , totaque peripheria decupla. Ideoque subtensa est latus decanguli.

Itaque Si decangulum & sexangulum inscribantur eidem circulo, restæ æ latere utriusque continuata secabitur proportionaliter, & majus segmentum erit latus sexanguli: & si majus segmentum resectæ proportionaliter sectæ est latus sexanguli, reliquum erit latus decanguli. $9p13$.

Comparatio sequitur decanguli & sexanguli cum quinquangulo.

9. Si decangulum, sexangulum, quinquangulum inscribantur eidem circulo, latus quinquanguli potest latera reliquorum: & si recte potest latera sexanguli & decanguli, est latus quinquanguli. $10p13$.

Est latus inscripti quinquanguli ae , sexanguli ei , decanguli ao . Dico latus ae posse reliqua. Sinto enim perpendiculares duæ, prima io , secunda iu bisecantes latera quinquanguli & decanguli, & concursus secundæ perpendicularis cum latere quinquanguli sit y . Demonstrationis syllogismus est hic. Oblonga è latere quinquanguli & ejus segmentis æquantur quadratis reliquorum laterum: sed quadratum ex eodem toto latere æquatur oblongis è toto, & segmentis per $3c13$: æquatur igitur & quadratis reliquorum laterum. Demonstratur syllogismi propositio. Hæc enim pars sola dubia est. Duo igitur triangula aei & eyi sunt æquiangula communi angulo ade item æqualibus ea & ei & ey dimidii nempe ejusdem eis , quia ille est per $10c6$, alter duorum æqualium, quibus eis exterior æquatur $2c9$ & 6 : & hic in dimidiam peripheriam insistit. Nam semiperipheria als æquatur semiperipheriæ ars , item al ipsi ar . Reliqua igitur ls , reliquæ rs , & tota rl dupla est ipsi us : Ideoque er dupla est ipsius eo : & rs dupla ipsius ou . Nam bisegmenta patent per $7c15$ & $9c16$. Itaque peripheria ers dupla est peripheriæ eo , & ideo angulus eiu est angulus eis per $6c16$ dimidius: bini igitur anguli duorum triangulorum æquantur. Itaque reliquus per $3c7$ reliquo. Quare per $9c7$, ut latus ae ad ei , sic ei ad ey . Itaque per $4c12$ oblongum extremarum æquatur quadrato mediæ. Jam connectantur oy , duo rursus triangula aoe & aoy æquiangula sunt communi angulo ada , itemque aoy & oea ideo æqualibus, quia ambo æquantur angulo ada , illic per $10c6$, hic per $2c7$, quia perpendicularis bisecans latus decanguli facit duo triangula æquicrura & æqua recto angulo crurum: ideoque æquiangula. Itaque ut ea ad ao , sic ea ad ay . Quare per $4c12$ oblongum extremarum æquatur quadrato mediæ, propositioque syllogismi vera est, quod demonstrasse oportuit. Conversam huic manifestam usurpat Euclides $16p13$.



r IO. Si

10. Si triangulum & quinquangulum inscribantur eidem circulo ad idem punctum, recta inscripta inter utriusque basim dicto puncto oppositam erit latus inscripti quindecanguli. 16 p 4.

Latus enim tri-
anguli
subten-
det $\frac{1}{3}$ to-
tius pe-
riphe-
ria: duo



latera quinquanguli subtendent $\frac{1}{3}$, & quibus si tollas $\frac{1}{3}$ relinquetur $\frac{1}{5}$. Itaque si quinquangulum & sexangulum inscribantur eidem circulo ad idem punctum, peripheria inter utriusque latera erit pars tricesima totius peripheriae.

Ut hic: itaq;
triangulorum
ordinatorum
quadrati, quin-
quanguli, sex-
anguli, decan-
guli, quindec-
anguli inscri-
ptio prompta
erit latere uni-
co, quod repetitum quoties opus est, peripheriam totam subtendat.



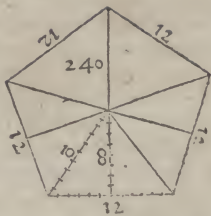
P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XIX.
de geodesia multanguli ordinati & circuli.

EX adscriptione circuli & rectilinei geodesia ducitur multangulorum ordinatorum, atque imprimis ipsius circuli. Concursum enim bisecantium duos angulos est centrum circumscripti circuli, ab eoque ad angulum radius, tumq; si quadratum est dimidio lateris tollatur & quadrato de radio, latus reliquum erit perpendicularis per 5 & 12. Itaque speciale theorema hic ita instituitur.

1. Planus est perpendiculari a centro in latus & dimidio perimetri, est area multanguli ordinati.

Ut hic quadratum est 10 radio est 100, quadratum est 6 dimidio lateris 12 est 36, quo illinc

quo illinc deducto reliquum 64 est quadratum perpendicularis, cujus latus 8 est ipsa perpendicularis, ex qua & 24 dimidio perimetri planus est 240 area quinquanguli. Demonstratio hic etiam est certa illius antecedentis causae. Nam de quinque triangulis in quinquangulo planus est perpendiculari & dimidio basis est unum, ut ante patuit, quintuplex igitur facit totum: Atqui illa multiplicatio est perpendicularis per semiperimetrum. In sexangulo ordinato etiam radius per 4 e 18 notus est latere sexanguli: Ut hic quadratum est radio 6 & 36, quadratum est dimidio lateris est 9, quo illinc subducto reliquum est 27 quadratum perpendicularis: latus est $5\frac{1}{3}$ perpendicularis ipsa ex qua & 18 semiperimetro planus est $93\frac{1}{3}$ area sexanguli. Denique in omnibus multangulis ordinatis theorema satisfacet. Atque haec geodesia est multanguli ex adscriptione, unde etiam est dimensio circuli, $\pi\tau\alpha\gamma\omega\iota\sigma\mu\epsilon\delta\varsigma$ quadratura circuli vulgo dicitur: argumentum geometris omnium fere ratum propositum, in quo sese exercerent. Bryso, Antipho, Euclides, Archimedes, Apollonius, Porus, atque e recentioribus Boetius, Campanus, Cusanus, Regiomontanus, Orontius hic elaboravere. Quidam etiam $\pi\tau\alpha\gamma\omega\iota\sigma\mu\epsilon\delta\varsigma$ impossibilem credere. Quaestiois nodus est in ratione diametri & peripheriae.



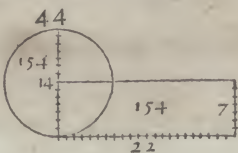
2. Peripheria est tripla diametri & fere sesquiseptima.

Haec ratio ut apud Heronem est Euclidi & antiquis geometris nota fuit. Quod enim tripla sit, sex radii, id est tres diametri indicant, quibus peripheria per 6 e 18 est circumscripta, & ideo quia continens major, sed excessus non plane est sesquiseptima. Deest enim unitas unius septimae, & excessus idem longe major est quam sesquioctava. Itaque quia differentia vicinior erat sesquiseptimae, assumpta est sesquiseptima: vero quippe propinquum pro ipso vero. Demonstratio Archimedis valde operosa est: si quis tamen curiosius requirat, materiam exercendi ingenii profusus Archimedeam est scholis accipito.



Itaque

1. Planus est radio & peripheria dimidio est area circuli. Hic enim 7 radius est dimidio diametri 14 multiplicans 22 dimidium peripheriae 44 facit 154 oblongum: in diametro autem duo latera



1 2 oppo=

opposita, item in perimetro duo reliqua opposita rectanguli continentur. Itaque binorum dimidia duntaxat assumuntur, a quibus comprehenditur rectangulum.

Et

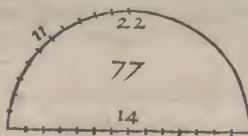
2. Ut 14 ad 11, sic quadratum diametri ad circulum.

Hic enim tres proportionis termini dantur potestate: quartus multiplicatione tertii per secundum & facti divisione per primum invenitur, ut hic quadratum e diametro 14 est 196. quo per 11 multiplicato factus 2152 dividatur per 14, quotus erit 154 pro quæsito circulo, quod e dimensis quadrato & circulo per analysin nascitur. Nam ratio 196 ad 154 est ratio 14 ad 11, ut reductis terminis apparet. Hic vero secundus *εὐκλείδης* Euclidis est apud Heronem, sed paulo secus propositus hoc modo. Si de quadrato diametri tollantur $\frac{3}{4}$, relinquetur area circuli: ut si 196 quadratum dividatur per 14, quotus erit item 14, qui ter sumpta sunt 42, & sublata de 196, relinquunt 154 quadratum æquale circulo. Quadratura igitur Euclidis ista Archimede antiquior est, & iucundum sit ab antiquis geometris istam geodasiam repetere, & tot Euclideanis exemplis demonstrare geodasiam geometrarum ingeniis nequaquam aliena esse: sed demonstratio rationis inventa ab Archimede laudem rationis etiam archimedeam fecit. Ex eadem illa peripheriæ & diametri ratione nascitur dimensio circularium partium semicirculi, sectoris, sectionis, maioris minoris. Et

3. Planus e radio & peripheriæ quadrante est area semicirculi.

Ut hic vis

des: factus enim a 7 radio multiplicato 11 quadrante facit 77. Po

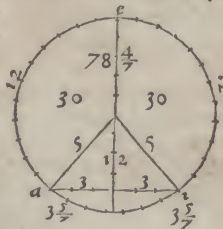


test & ista dimensio fieri sumpto dimidio dimensi jam circuli.

Et

4. Planus e radio & basis dimidio est area sectoris.

Hic tres sunt sectores ac basis 12 pedum, ei item 12 pedum, reliquus 14 $\frac{2}{3}$, diameter 10, multiplica 5 per 6 factus erit 30 pro primo sectore, quā



tus erit & secundus: multiplica item 5 per $3\frac{2}{3}$ quotus erit $18\frac{1}{3}$, e quibus additis redditur circulus $78\frac{1}{2}$.

Et

5. Si trian

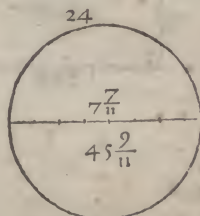
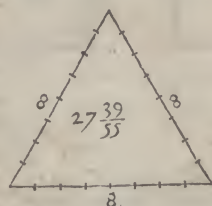
5. Si triangulum ē duobus radiis & basi majoris sectionis addatur duobus in ea sectoribus, totum erit area sectionis majoris: sin detrahatur suo sectori reliquum erit area minoris.

Adde ad sectores ae , & e i triangulum, ut in eodem exemplo a o i pedum 12, totus erit 72 area majoris sectionis, tollatur idem de $18\frac{2}{7}$ tertio sectore, $6\frac{2}{7}$ reliquum erit area minoris sectionis.

6. Circulus ē planis isoperimetris in equalibus est maximus.

Quippe qui sit ordinatissimus & terminatissimus, ut circulus a perimetri

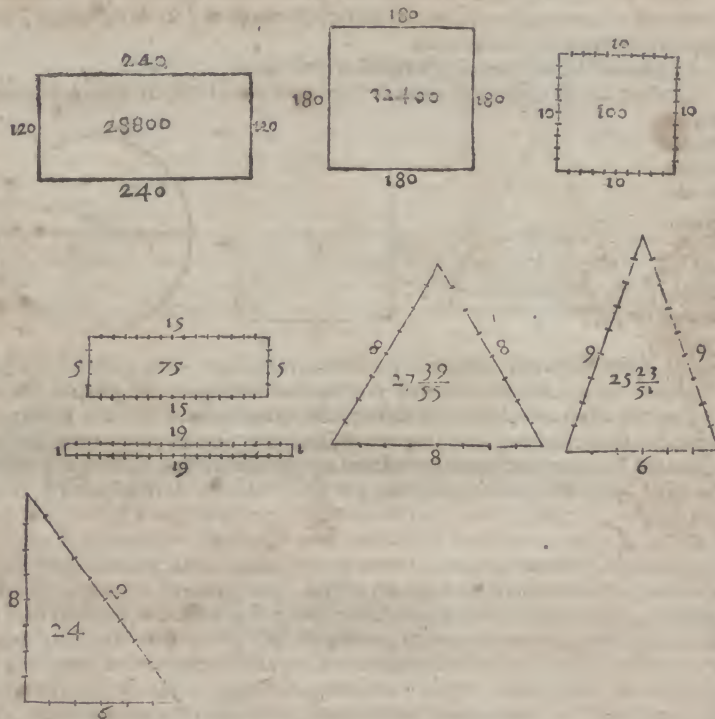
24 est
major
rectili
neo i
soper
ime
tro, ut
qua
drato
e trian



gulo i. Atque omnino reliquis isoperimetris rectilineis. Qua de re lubet Quintiliani locum 10 cap. i lib adversus *voluptas* adungere, ut pudeat rhetori geometria usum tam elegantem notum esse, qui plerisque summis hominum opinione philosophis plane sit ignotus. Quis (ait) non ita proponenti credat? Quorum locorum extrema linea eadem mensuram colligunt, eorum spatium quoque, quod his lineis continetur, par sit necesse est. At id falsum est. Nam plurimum refert, cujus sit forma ille circuitus, reprehensiveque a Geometris sunt historici, qui magnitudines insularum satis significari navigationis ambitu crediderunt. Nam ut quaecunque forma perfectissima, ita capacissima est: Ideo que illa circumcurrens linea si efficiat orbem, quae forma est in planis maxime perfecta, amplius spatium complectetur, quam si quadratum paribus oris efficiat. Rursus quadrata triangulis, triangula ipsa plus aequis lateribus quam inaequalibus. Sed alia forsitan obscuriora, nos facillimum etiam imperitis sequamur experimentum. Jugeri mensuram, ducentos & quadraginta longitudinis pedes esse, dimidioque in latitudinem patere non fere quisquam est, qui ignoret: & qui sit circuitus, & quantum campi claudat colligere expeditum. At centeni & octogeni in quamque partem pedes, idem spatium extremitatis, sed multo amplius clausae quatuor lineis area faciunt. Id si computare quem piget, brevioribus numeris idem discat: Nam deni in quadram pedes, quadraginta per oram, intra centum erunt. At si quindenarii per latera, quini in fronte sint: ex illo quod amplectuntur, quartam deducunt eodem circumductu. Si vero porrecti utrinque undeviceni singulis distent non plures intus quadratos habebunt, quam per quot longitudo ducetur: quae circumibit autem linea, ejusdem spatii erit cujus ea quae centum continet. Ita quidquid formae quadrati detraxeris, amplitudini quoque peribit. Ergo etiam id fieri potest, ut majore circuitu minor loci amplitudo claudatur. Hoc in planis. Nam in collibus

r 3 valli,

vallibusque etiam Imperito patet plus soli esse quam calli: Exempla rem subi-
ciunt oculis.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XX.

de superficie gibba.

Gibbum est superficies quae inaequaliter intra suos terminos inter-
jacet.

Superficies plana adhuc amplissime proposita est, ex eius contrario gibba
possit intelligi: atque ut antea planum pro superficie plana, sic modo gibbum
pro superficie gibba dicatur: nec tamen gibbum quodlibet modo definitur, sed
quod secum plano basi parallelo faciat communem sectionem peripheriam. Id si
lubet regulare nominetur.

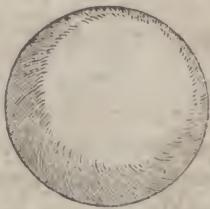
2. Gibb

2. *Gibbum est sphaericum aut varium.*

Partitio respondet partitioni lineæ in peripheriam & helicem.

3. *Sphaericum est gibbum æquidistans à centro comprehensi spatii.*

Sic antea peripheria definita est, nominatur autem sphaericū à sphæra inopia verbi, cum sphæra potius à sua superficie nominari debuerit, ut planum corpus à plana superficie dicitur, quæ nominis hysteresis erit in superficie conica & cylindracea.



Fit conversione semiperipheriæ manente diametro. c. 14 d. 11.

Ut hic si spatium inter peripheriam & diametrum inane cogites. Atq; ut recto motu lineæ rectæ efficitur planum, sic motu peripheriæ effici-



tur sphaericum: Atque ut locis omnibus recta in plano, sic peripheria in sphaerico duci potest.

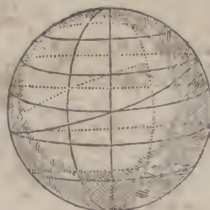
4. *Maxima in sphaerico peripheria est quæ sphaericum bifecat.*

Quæ de rectis in circulo præcipiuntur, eadem fere huc referuntur, & quidem circulorum sphæra inscriptorum nomine, qui cum sphæra in plano considerantur, lineis etiam adumbrantur, & tamen qui circuli in sphæra considerantur, peripheriæ revera sunt in sphaerico. Sic igitur Euclides 17 p. 13 postulat maximum sphærae circulum esse, qui transit per centrum, id est qui sphæram bifecat. Maxima itaque peripheria sphaerici respondet diametro circuli. Itaque

Peripheria propior maxime est major remotiore, & utrinque æquidistantes à maxima duæ sunt æquales.

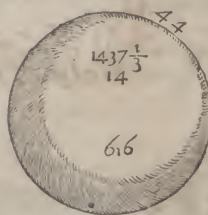
Simillima

Similli-
ma enim
hic repe-
ti possunt
iis quæ
12. 13. 14
et 15 pro-
ponun-
tur, ut
hic.



5. *Planus est maxima peripheria & ejus diametro est sphericum.*

Geodæsia sphericæ & sphericorum segmentorum analogia quadam respon-
det geodæsia circula-
ri. Sic igitur planus
sphericæ est diametro
14 & peripheria 44
est sphericum 616.
Sic antea circuli area
est dimensa per rectan-
gulū est tunc dimidio
diametri, tum peri-
pheriæ. Hic vero per
totam & diametrum & peripheriam efficitur rectangulum prioris quadruplū
pro mensura sphericæ, quia per 14 & 6 plana similia qualia hic cogitantur est dimi-
dio & diametri & peripheriæ, est que tota & diametro & peripheria, sunt in du-
plicata ratione homologorum laterum.



Itaque

1. *Planus est maximo circulo & 4 est sphericum.*

Confectarium patet ex elemento proximo. Archimedes de sphaera demon-
strat, sed præpostere est conis sphericum æquari quatuor maximis circulis. Et

2. *Ut 7 ad 22, sic quadratum diametri ad sphericum.*

Nam 7 & 22 duo sunt termini minimi in ratione diametri ad peripheriam: in
circulo autem ut 14 ad 44, sic quadratum diametri ad circumferentiam. Analogia respo-
det, quia hic multiplicas per duplum, & dividis per dimidium: Illic contra
multiplicas per dimidium, dividis per duplum. Itaque illic circulus simplex
efficitur, hic quadruplus. Hæc igitur analogia est circuli & sphericæ, ex qua eti-
am est hemisphericum, sectio major, minor.

Et

3. *Planus est maxima peripheria & radio est hemisphericum.*

Ut hic erit 308.

6. *Si quota pars est radii perpendicularis à centro ad basim sectionis
majoris, tanta augeatur hemisphericum, totum erit sphericæ major sectionis:
sin tanta minuatur, reliquum erit minor.*

Ut in

Ut in exemplo pars radii terti, id est $\frac{3}{7}$ est à centro, quanta pars hemisphaeri

ci 308 est 132.

Additis igitur

132 ad 308 cō-

ponitur 440

pro sphaerici

maioris sectio-

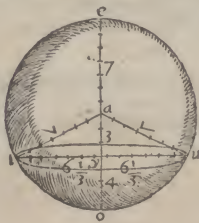
ne: Detrahitur

autem relin-

quentur 176

pro sphaerici

minore sectione.



7. Varium est gibbum, cuius basis est peripheria, latus recta à termino verticis in terminum basis.

Hæc affectio duplex est communis superficierum variarum regularium: ut patet 18.20.21.23 d 11. Infinitæ vero sunt species ut helicis, sic vari, sed ab Euclide ex omni numero, duæ species selectæ sunt, quas generali affectione complectimur.

8. Varium est conicum aut cylindraceum.

Hæc nimirum geometris species duæ placuerunt: atque ut antea planum & sphaericum pro superficie plana & sphaerica, ita modo conicum & cylindraceum pro superficie conica & cylindracea intelligantur.

9. Conicum est quod à subjecta peripheria aqualiter fastigiatur ad verticem.



Itaque

Fit conversione lateris circa subjectam peripheriam.

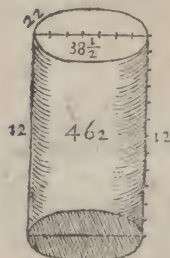
Quod ab Apollonio propositum primo conicorum repetitur à Proclo ad 4 d 1.

10. Planus è latere & dimidio basis est conicum.

ut in exemplo superiore latus est 13, semiperipheria $15\frac{5}{7}$, unde planus est $20\frac{3}{7}$ superficies

superficies conica: cui si addideris subiectum circulum, tota superficies constabit. Qua vero de primarum figurarum æqua altitudine & reciprocatione dicta sunt, conicis etiam possint attribui, indeque cylindraceis, tametsi ab Euclidæ hæc præterita sint in superficie.

II. Cylindraceum est quod a subiecta peripheria ad sublimem æqualem & parallelam peripheriam equaliter erigitur.



Itaque

Fit conversione lateris circa duas peripherias æquales & parallelas.
Hoc enim modo fabricatur Serenus.

12. Planus est sua basi & altitudine est cylindraceum.

Ut hic peripheria 22, et colligitur est 7 diametro, altitudo 12. Planus igitur cylindracei est 462, quibus si addideris duas utrinque bases, bis nempe $38\frac{1}{2}$ vel 77, tota superficies erit 539. Quamobrem hæc paucula sunt de superficie gibba.

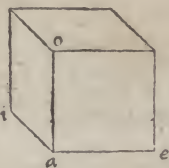
P. RAMI GEOMETRIÆ LIB. XXI.
de lineis & superficiebus in solido.

HAstentis geometria fuit de linea & superficie: superest stereometria pars artis altera de corpore: stereometria est in elementis exigua, & Plato 7 de repub. conqueritur hanc scientiam nondum inventam, & quidem duabus de causis, quia difficilis, quia contempta: ideoque publicis honoribus & præmiis excellentia ingenia excitanda ad tantæ rei indagationem. Itaque Platonis velut autoritate permoti Archimedes, Theodosius, Apollonius, Serenus, Pappus in vacuas possessionis huius partes ingressi mirabiles structuras fecerunt: Archimedes in libris de sphaera & cylindro, de conoidibus, sphaeroidibus, quadratura parabolæ, Theodosius in libris de sphaera, Apollonius in libris de conicis, Serenus in libris de sectione cylindri, Pappus in variis plerisque, unde Euclidis inopia possit expleri.

I. Corpus est lineatum latum & altum, id est II.

Longitudo

Longitudo enim sola est linea, longitudo & latitudo est superficiei, longitudo, latitudo, altitudo simul est corporis, & hæc magnitudinis trina perfectio est corporis, qua intelligimus in corpore non solum lineas longitudinis & superficies latitudinis, sic enim corpus è lineis & è superficiebus constaret, sed soliditatem in longum, latum, altum concipimus. Pars enim corporis qualibet etiam corpus est. Itaque etiam solidum pro corpore ipso intelligimus: ut in corpore *aeio* longitudo est *ae*, latitudo est *ai*, altitudo est *ao*.



2. *Terminus solidi est superficies. 2 d II.*

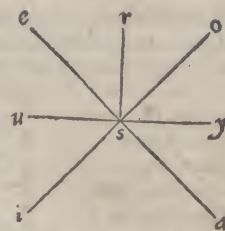
Terminus lineæ est punctum, neque punctum tamen est linea aut lineæ pars ulla, terminus superficiei est linea, neque tamen linea est superficies, aut superficiei pars ulla, sic modo terminus corporis est superficies: neque superficies tamen est corpus aut corporis pars ulla: aliud est magnitudo, aliud terminus magnitudinis: ut patuit *5 e 1*: ut vero lineæ planæ jam dictæ sunt quæ spectantur in plano, sic solidæ & lineæ & superficies appellantur, quæ considerantur in solido, earumque perpendiculum & parallelismus è simplicibus lineis repetuntur.

3. *Si recta est rectis in subiecto plano intersectis perpendicularis in communi sectione, est perpendicularis subiecto plano: & si est perpendicularis plano, est rectis in subiecto plano intersectis perpendicularis in communi sectione. e' 3 d & 4 p II.*

Perpendiculum lineis in superficie consideratis attributum est antea. Itaque inde repetitur consecrarium de perpendiculo lineæ cum superficie ipsa. Duæ lineæ sunt perpendiculares, quarum altera in alteram incidens æqualiter interfacet, & eadem definitione intelligimus sublimem lineam infinitis lineis in plano intersectis incidentem in communi puncto perpendicularem esse ipsi plano, quia æqualiter in omnes partes interfacet, & singulis intersectis lineis concipimus singula plana cum sublimi communia, ut sublimis & qualibet intersectarum sint in eodem plano perpendiculares, sublimisque linea plano subiecto ideo sit perpendicularis, quia in eodem puncto est perpendicularis omnibus rectis quacumque parte sumptæ fuerint: ut si cogites rectas *ae, io, uy*, in subiecto plano intersectas in communi sectione: & sublimem *sr* singulis esse perpendicularem in communi puncto *s*, exemplum habebis consecrarii. Itaque

s 2 perpendi-

perpendicularum lineæ ad planum subiectum est ϵ lineis in uno plano, & consecutarium modo est ϵ princeps illa definitione reciprocum, neque linearum numerus hic certus definitur. Nam si de duabus est verum, est omnino verum de infinitis: quatuor enim anguli recti subiectarum cum sublimi æquabile statum demonstrabunt. Intelligatur tamen minimū de duabus subiectis in communi puncto perpendicularum. Communis autem sectio linearum hic punctum dicitur, ut dicitur ab Euclide nominatim ad 4 & 5 p 11.

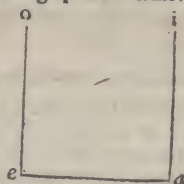


4. Si tres rectæ intersectæ sunt eidem rectæ perpendiculares in communi sectione, sunt in eodem plano. 5 p 11.

Ex perpendicularo enim & communi sectione intelligitur æqualis in omnes partes status, proptereaque planities eadem: ut in superiore exemplo $a s, y s, o s$ sint eidem sublimi $s r$ perpendiculares, erunt in eodem subiecto $a i u e o y$. Atque hæc de perpendicularo sublimi, unde contraria obliquitas intelligitur vel inclinatio nis in angulo acuto, vel declinationis in obtuso, quæ est 5 & 6 d 11: item similitum inclinationum ex æqualibus angulis quæ est 7 d 11: parallelismus consequitur, qui tametsi permiscetur cum solido perpendicularo, consideratur tamen semper in uno plano.

5. Si duæ rectæ sunt perpendiculares subiecto plano, sunt parallelæ: & si parallelarum altera est perpendicularis subiecto plano, reliqua est eadem perpendicularis. 6. 8 p 11.

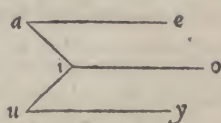
Causa est ϵ prima lege parallelismi. Nam si duæ rectæ sunt eidem subiecto plano perpendiculares, connexæ rectæ interiores angulos æquabunt duob. rectis, proptereaque parallelæ erunt per 12 e 5: & si in parallelis connexis alter interior angulus rectus sit, reliquus etiam rectus erit, quia communi perpendicularo dividuntur: ut in exemplo. Si anguli $a d a$ & e sunt recti, $a i$ & $e o$ sunt parallelæ, & contra si parallelæ sint $a i$ & $e o$, & angulus $a d a$ sit rectus, etiam $a d e$ rectus erit.



6. Si rectæ in diversis planis sunt ad eandem rectam parallelæ, sunt inter se parallelæ. 9 p 11.

ut hic

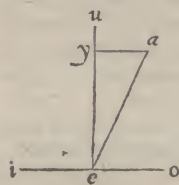
Ut hic sint rectae ae & uy in
diversis planis ad id paralle
la, erunt inter se parallelae.
Nam à puncto i perpen
diculares per 9 & 5 sunt ia
& iu . Itaque per 3 & o cum u
sit perpendicularis duabus



intersecitis ia & iu , est perpendicularis subjecto plano. Ergo per 6 & y & e a sunt
perpendicularis eidem plano, ideoque per idem sunt parallelae. Hæc Euclidis est
demonstratio: postulati tamen id potuit.

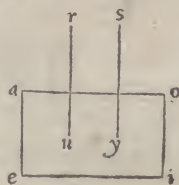
7. Si duæ rectæ sint perpendiculares, prima à sublimi puncto in rectam
subjectam, secunda à communi sectione in subjecto plano, tertia à dicto
puncto perpendicularis secunde erit perpendicularis subjecto plano. *è*
II p II.

Consecutarium est 3 e. ut si à puncto sublimi a sit per 10 & 5 perpendicularis
 ae in e punctum subjectæ rectæ io , &
ab e communi sectione per 9 & 5 sit al
tera perpendicularis eu , denique ay
sublimis recta sit per 10 & 5 perpendi
cularis in eu ad punctum y , ay perpen
dicularis erit subjecto plano. Nam
quod ae perpendicularis est ipsi io ipsa
 ae , neq; dextrorsum neq; levorsum ac
clinat per 10 & 2 , & quod iterum ay per
pendicularis ipsi eu , neque prorsum neque retrorsum pendet. Itaque in qua
tuor partes interfacet æqualiter. Denique si recta io paribus angulis congruat
ipsis r tertium elementum redierit.



8. Si recta à dato subjecti plani puncto sit parallela rectæ ad idem
platum perpendiculari, erit etiam perpendicularis subjecto plano. *ex* 12
p II.

Ut esto planum $aeio$, & datum punctum in e sit u , unde sublimis perpendi
cularis sit erigen
da, fiat à puncto y
perpendicularis y
in subjectum pla
num per 7 e, & ei
parallela statuatur
 ur per 3 c 12 e 5.
Jam ur , cum sit pa
rallela perpendicu



lari in subiectum planum, erit eidem per se perpendicularis. Sic igitur est perpendiculum & parallelismus solidarum rectarum: sequitur de planis solidis utrumque.

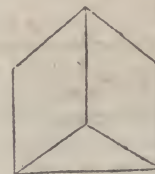
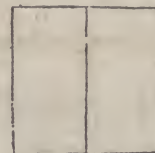
9. Si recta in altero intersectorum planorum perpendicularis communi sectioni est perpendicularis reliquo, plana sunt perpendicularia: & si plana sunt perpendicularia, recta in altero perpendicularis communi sectioni est perpendicularis reliquo. e 4 d e 38 p II.

Perpendiculum planorum e proxima perpendiculi ratione ducitur, planorumque inter se æqualis utrinque status est e rectæ in planum perpendiculo, quia hinc intelligitur planum ipsum æqualiter in omnes partes lineis rectis nepe significatas interjacere, quod in libro duabus utrinque paginis aperto percipitur e versibus paginarum sectioni & subiecto plano perpendicularibus: Ut hic vides. Hic igitur duo sunt, ut prius communis sectio & planum: antea ut recta sublimis esset perpendicularis subiecto plano, cadebat in communem sectionem duarum rectarum, & perpendiculus erat rectis in ea intersectis. Hic perpendiculum ejusdem rectæ duplex exigitur, primum in communem sectionem, quæ est non punctum ut prius in lineis, sed linea recta, terminus est linea, & planities ipsa prius explorata est intra duas rectas. Secundum est in subiectum planum.



10. Si recta est perpendicularis plano, omnia per eam plana, sunt eidem perpendicularia: & si duo plana intersecta sunt alicui plano perpendicularia, communis sectio est eidem perpendicularis. e 15 e 19 p II.

Hæc elementa separatim ab Euclide proponuntur & citantur: Prius tamen est consecrarium 9 e, & posterius ex eo patet, quod communis ipsa sectio sit recta in quolibet intersectorum sublimitum planorum perpendicularis & communi sectioni, & subiecto plano. Nam si communis sectio non esset subiecto plano perpendicularis, neque intersecta plana essent subiecto plano perpendicularia, sed aliquod esset obliquum contra thesim: Ut hic vides. Atqui hoc perpendiculum est planorum, parallelismus superest.



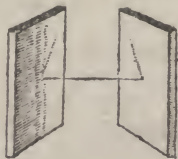
II. Plana

II. *Plana sunt parallela quae nusquam annuunt. 8 d II.*

Parallelismus planorum est non concursus verus est, sicut rectarum in eodem plano ad 11 e 5, quamvis linearum omnium nequaquam sit, quales in conico asymptotas proposuimus primo libro. In parietibus & tabulatis ædium æquidistantibus parallelismus planorum agnoscitur. Et

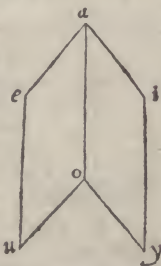
12. *Quae communi perpendicularo dividuntur. 14 p II.*

Consequenter est 3 & 6 e. Nam si media recta est perpendicularis utrique plano, est etiã rectis utrinque intersectis perpendicularis in communi sectione, & rectis utrinque interiores anguli parallelismum cõvincent. Est item definitio ipsa parallelismi ad 11 e 2. Et



13. *Si binæ rectæ in ipsis conterminæ, sunt parallelae. 15 p II.*

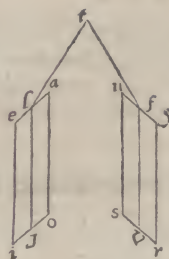
Tales sunt oppositi parietes in fastigio ædium. Ut sunt o e a i & u o y plana quæ habeant binas rectas e a & i a, item u o & y s conterminas in a & o & parallelas nempe e a contra u o & i a cõtra y o : Dico plana ipsa parallela. nam rectæ u e & o a, item y i & o a conterminæ æquales parallelas, erunt per 6 e 12 e 5 æquales & parallelæ, & sic parallelismus & æquidistantiam indicabunt. Idem vero fuerit si conterminas cogites infinite extendi, plana quoque extensa erunt infinite parallela.



14. *Si duoplane parallela secantur plano, communes sectiones sunt parallelae. 16 p II.*

Uthic vides plana parallela a e i o & u y s r secã per planum l j v f, communes sectiones

seccio-
nes l j
& f u e
rūt pa-
rallele,
secus i
p l a, i a
de o q
& p l a-
na in
quib.



sunt, concurrent, ut in puncto f contra thesim.

P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. X X I I.
de pyramide.

Stereometria rectarum & planorum ita est: sequitur solidorum ipsorum stereometria.

1. *Axis solidi est diameter circa quam convertitur.* 15, 19, 22 d II.

Axis vulgo putatur esse proprius sphaerae: Ut hic a e: verum etiam attribuitur cono & cylindro, & solido plano, & ordinatis tetraedro, hexaedro, octaedro, icosaedro, dodecaedro, & conversionis motus nominatim exprimitur, ut hic motus geometricus intelligitur: & sic axis in conoidibus & sphaeroidibus dicitur.



2. *Solidum rectum est cujus axis est perpendicularis centro basis.*

Sic conus, sic cylindrus rectus Apollonio & Sereno definiuntur, & hos solos Euclides consideravit: imo solidum nullum nisi rectum geodesia suscipit. Itaque generaliter de omni solido id intelligi potest: & aptius est ad Euclidis stereometriam.

3. *Si solida comprehenduntur a superficiebus homogeneis aequalibus multitudine & magnitudine, sunt aequalia.* 10 d II.

Aequalitas linearum & superficieum nullo praecipuo axioma instructa est, sed praesumpta est ex logico & communi sensu, & in plerisque ipse quos illic satis

lic satis esse potuit. Hic vero *ἐφ' ἑκαστοῖς* corporum fit per superficies. Euclides tantum de planis loquitur, stereometria tamen de quibuslibet solidis vera est. Duo cubi sunt æquales, quorum senæ superficies planæ sunt æquales: duæ sphaeræ sunt æquales, quarum superficies sunt æquales: duo coni cylindrique sunt æquales, quorum superficies superficiebus, bases basibus sunt æquales: neque tamen hinc dixeris isoperimetra solida qualibet esse æqualia: fallere enim possit in heterogeneis, neque id modo postulatur, sed ex æquali superficialium & multitudine & magnitudine æqualitas solidorum dijudicatur.

4. Si solida comprehenduntur à superficiebus multitudine æqualibus & similibus sunt similia. 9 d II.

Confectarium est è generali definitione similium figurarum ad 14 e 4. figuræ enim similes illic definite sunt æquiangulæ & proportionales cruribus & quantum angulorum: At in solidis planis similibus anguli æquantur ex similitudine planorum similium, & crura æqualia sunt ipsæ planæ superficies, & ideo proportionales, æquales, & similes.

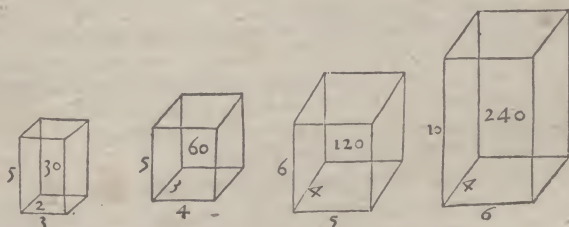
5. Solida similia habent triplicatam rationem homologorum laterum, & duo media proportionalia. 33 p II. 8 p 12.

Confectarium est 15 e 4. ut exemplum repetitum indicabit.

6. Solidum est planum vel gibbum.

Differentiæ planorum à terminis suis assumptæ sunt, à lineis enim rectis & obliquis rectilinea & obliquilinea facta sunt, ita corporum differentiæ sunt à suis

item
terminis,
inde
planum
vel
gibbum
nominantur.



7. Planum, quod comprehenditur à superficiebus planis.

Ut planum *ἐν τριγώνῳ* rectilineum dicitur, ita solidum si compositio patere, *ἐν τετραγώνῳ* tanquam dicas planificium diceretur, quod facies habeat planas: sic enim tetraedrum, hexaedrum, & ceteræ species compositis nominibus nominantur. Planum corpus distinguitur à numero planorum, quæ *ἐν δὲ* sunt, unde tetraedrum, pentaedrum, hexaedrum, basis etiam pro hedra dicitur. Planum rectilinei differentiæ fuerunt à numero laterum vel angulorum, unde trilaterum, quadrilaterum, multilaterum, vel triangulum, quadrangulum, multangulum.

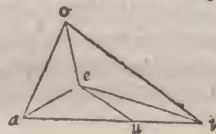
gulum. Sic corporis plani differentia sunt à numero terminorum, quos hedras diximus appellari, sed aliter quam in planis series perpetua est in pyramide à quaternario in pyramidato autem à quinario. Numerus angulorum numero terminorum non perpetuo respondet, pyramis tetraedra, pentaedra, polyedra, est quidem quadrangula, quinquangula, multangula, sed prisma pentaedrum est sexangulum, hexaedrum, octangulum, & sic deinceps.

8. Anguli plani comprehendentes angulum solidum sunt minores quatuor rectis. 21 p II.

Nam si quatuor rectis æquarentur, complerent locum planum per 4 c 10 c 6, neque omnino angulum facerent, multoque minus si majores.

9. Si tres anguli plani minores quatuor rectis comprehendant angulum solidum, duo quilibet sunt majores reliquo: & si duo quilibet sunt majores reliquo, comprehendunt angulum solidum. 20 & 23 p II.

Analogia est ad 7 c 6, & causa etiam in promptu est. Nam si duo plani anguli essent æquales reliquo, nullum spatium medium cum reliquo cõcluderetur, quin si cogites congruere cruribus planum congruentia sua facerent è duob. unum: multo vero minus si minores. Cõversa hinc etiam patet. Euclides ita demonstrat. Primo si anguli tres sunt æquales, duo: protinus intelliguntur majores esse reliquo. Sin anguli sint inæquales, sit angulus $a e i$ major angulo $a e o$, & æqualis amputetur $a e u$, & æquetur $e u$ ipsi $e o$. Iam per 2 c 7 duo triângula $a e u$ & $a e o$ æquantur basibus $a u$ & $a o$. Item $a o$ & $o i$ majora quam $a i$ & $a o$, æquatur ipsi $a u$. Ergo $o i$ majus est ipso $i u$: Hic duo triângula $u e i$ & $i e o$ duobus cruribus æqua, & basis $o i$ major basi $i u$: Ergo per 4 c 7 angulus $o e i$ major est angulo $i e u$. Ergo duo $a e o$ & $o e i$ sunt majores quam ipse $a e i$.



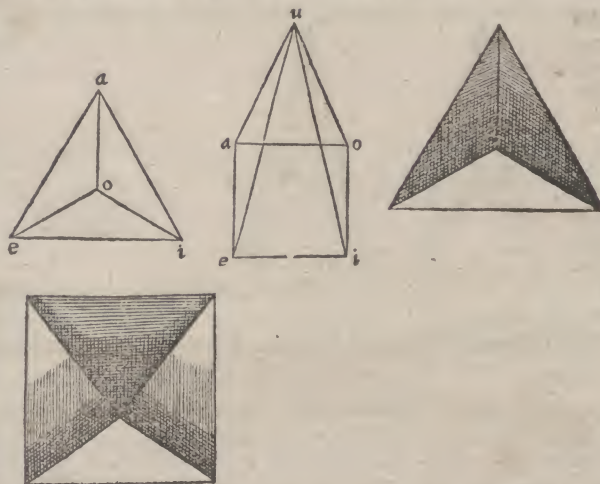
10. Solidum planum est pyramis aut pyramidatum.

Vocabulis novis in re minime nova utimur, sed tamen nondum generaliter nominata. Dichotomiae tales præcesserunt de linea lineato, triângulo triángulo lato: & veritas rerum in hæc genera apte concluditur.

11. Pyramis est solidum planum à basi rectilinea æqualiter fastigiatum.

Ut hic

Ut hic
intelli
gis à
triang
gula
basi a
ei in
verti
cem o
erigi
triang
gula a
oe, ao
i, eo i:
in py
rami
de aei
ou vi
des à
basi
qua



drangula aei o in verticem u triangula similiter erigi.

1. Pyramidis hedrae sunt una plures angulis in basi.

2. Pyramis est prima figura solidarum.

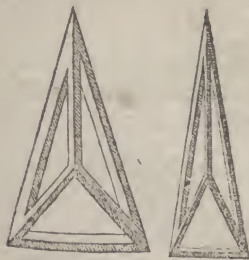
Est enim pyramis in solidis, ut triangulum in planis. Resolvi enim pyramis potest in solidas figuras alias, sed in nullam simpliciores potest, & paucioribus hedris constantem.

3. Pyramides aequalitae sunt ut bases. 5 e & 6 p 12.

Itaque

Et

Itaque



4. Reciproca basi & altitudine sunt aequales. 9 p 12.

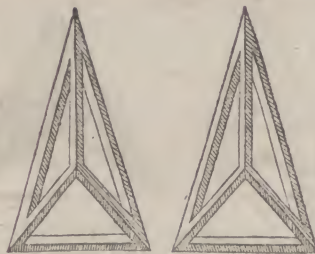
Consecraria haec sunt e 12 & 13 e 4. Atque hic Euclides ut in prismatis nominavit basim & altitudinem pro cruribus aequalis anguli, ut in exemplis. Dux

t 2

pyramides

Et

pyramides
sunt æque
altæ basis
triangulæ
prioris du-
plæ ad po-
steriorem.
Itaque pri-
ma est du-
pla secun-
dæ. Item de
exemplo sequenti, ut basis primæ sit ad basim secundæ, sic altitudo secundæ ad altitudinem primæ.



12. Tetraedrum est pyramis ordinata a' quatuor triangulis comprehensa. 26 d II.

Ut hic vides. In planis rectilineis admanuimus in unoquoque genere unicā speciem esse ordinatam ē triangulis æquilaterum, ē quadrangulis quadratum, sic modo ē toto pyramidum genere unicam speciem ordinatam esse tetraedrum: neque tamen omnem, sed quæ comprehenditur à triangulis non solum ordinatis quidem sigillatim, sed æqualibus inter se similibusque. Possunt enim corpora comprehendere ab ordinatis hedris, quæ tamen non sint ordinata, quia hedra illæ possunt ordinatæ separatim esse, sed neque æquales inter se, neque similes, neque ideo ordinatum corpus comprehendunt: qualia sunt Archimedis tredecim corpora apud Pappum § lib. Tetraedrum autem generali nomine species ista dicitur propter excellentiam, quomodo etiam pyramis appellatur. Itaque



1. Tetraedri latera sunt sex, anguli plani duodecim, solidi quatuor.

Nam tetraedrum comprehenditur à quatuor triangulis ternorum laterum atque angulorum: unumquodque autem latus bis assumitur, ideoque numerus est dimidio minor. Hæc sunt in scholis ad finem 15 l. Et

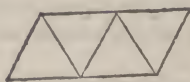
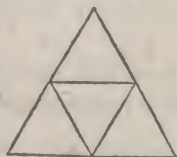
2. Tetraedra duodecim complent solidum locum.

Quia octo solidi anguli recti complentes locum & duodecim anguli tetraedri æquantur inter se, cum utrique 24 rectis planis comprehendantur. Rectus enim solidus comprehenditur à tribus planis rectis, ideoque 8 comprehenduntur à 24. Item angulus tetraedri comprehenditur à tribus planis æquilateris, id est à sex tertiis unius recti: ideoque à duobus rectis. Itaque 12 comprehenduntur à 24. Sic Potamon geometra (ut est apud Simplicium 8 cap. 3 lib. de celo) demonstraverat ex angulis compleri locum solidum à 12 pyramidibus. Et

3. Si quæ

3. Si quatuor triangula ordinata & equalia solidis angulis componantur, comprehendunt tetraedrum.]

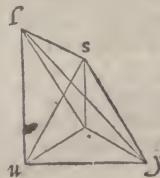
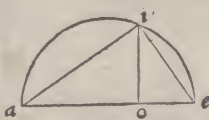
Hæc
fabri-
ca
prom-
ptior
est, uti
potes
in sub-
iectis



exemplis intelligere. Hæc enim triangula sic explicata copulato & connectito inter se, facies tetraedrum.

13. Si recta potens sesquialterum ad latus trianguli æquilateri secetur dupla ratione, duplum segmentum perpendiculare trianguli centro, connexum cum ejus angulis comprehendet tetraedrum. 13 p 13.

Comprehendi solidum à rectis intellige per plana rectis comprehensa, ut deinceps. Ut hic esto primum recta ae potens sesquialterum ad ai latus trianguli æquilateri, ut antea patuit 6 e 12, & secetur dupla ratione in o per 1 c 13 e 5, duplumque segmentum ao sit perpendiculare æquilatero triangulo uys ad centrum r per 7 e 21, sitque rl connexum cum angulis per lu , ls , ly : Dico triangula uys , usl , ysl , uyl æquilatera & æqualia esse quia latera omnia sunt æqualia: Humilia tria primo æquantur ex thesi, sublimia tria per 5 e 12 & e sublimibus quodlibet humili: Nam si triangulo circumlatus circumscriptus intelligatur, latus poterit triplum radii ur per 7 e 18: At sublimi potest item triplum, ut patet in prima figura de radio oi , qui est pro radio secunda figura ur : ut enim ao ad oi , sic per 1 c 4 e 8 oi ad oe , & per 1 c 15 e 4, ut prima recta ao est ad tertiam oe , sic quadratum ao ad quadratum oi , & componendo ao cum oe , ut ae ad oe , sic quadrata ao & oi , id est per 5 e 12, quadratum ai ad quadratum oi , at ae est tripla ipsius oe : Ergo quadratum ai est triplum quadrati oi . Quare latus sublime æquale ipsi ai potest triplum radii, latera quoque ideo omnia æqualia, proindeque & ipsa triangula.



t 3 P. R A M I

Pramidatum est solidum planum à pyramidibus comprehensum.

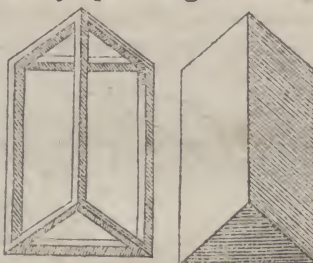
Pyramidatum sic è pyramidibus componitur, ut è triangulis triangulatum, & pyramis prima figura sic antea facta est, & compositio postea per species apparebit.

2. *Pyramidatum est prisma aut polyedrum mistum.*

Partitio pyramidati deinde fuit difficilior in materia rerum nondum satis animaduersarum vel explicatarum: dichotomia tamen hic adhibita est, quæ nobis optima adhuc occurrit.

3. *Prisma est pyramidatum, cuius duo opposita plana sunt æqualia, similia, parallela: reliqua parallelogramma.* 13 d II.

ut hic vides. Pyramidis unica basis fuit, prismatis duæ sunt bases oppositæ primo æquales, tum similes, deinde parallele: reliquæ sunt parallelogrammæ. Prisma est Campano corpus ferratile, secuto nempe quandam originem nominis: *prisma* enim, id est seco, distingo, & *prisma* est coarctatio, compressio.



Itaque

Hedre prismatis sunt binario plures angulis in basi.

Ut vero pyramidis à quaternario, sic prismatis à quinario in infinitum accretio est, ut sit à basi triangula, quadrangula, quinquangula, pentaedrum, hexaedrum, heptaedrum, & sic in infinitum. Prisma autem in Euclide interdum specialiter intelligitur de pentaedro, ut ad 40 p II, ad 3. 4 p 12, ut rectangulū in planis pro oblongo, & pyramis in solidis pro tetraedro ordinato.

4. *Planus è basi & altitudine est soliditas recti prismatis.*

Geodasia nempe parallelogrammi rectanguli est hic communis, cum altitudinis plana sunt rectangula parallelogramma, sed res per species intelligitur.

5. *Prisma est triplum pyramidis basi & altitudine æqualis.* è 7 p 12.

Ut in exemplo prisma pentaedrum sectum est in tres pyramides æquales: Prima enim è planis *a e i*, *a e o*, *a o i*, *e i o* æquatur secundæ è planis *a o i*, *a o u*, *a i u*, *a u o* per 7 c 7, quia æquatur basi & altitudine communi. Itaque prima & secunda æquatur:

æquatur:

Et secun-

da eadem

æquatur

sibi ipsi,

dum ba-

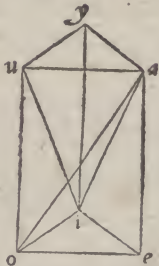
sis sit iou ,

& vertex

a , tumq;

æquatur

tertiæ e



planis $ai u$, $ai y$, $ui y$, $au y$. Itaque tres æquantur. si basis triangulata sit, prisma solvatur in prismata basis triangulæ, theorema concludetur ut prius. Itaque

1. Planus e sua basi & triente altitudinis est soliditas pyramidis basi & altitudine æqualis.

Altitudo autem pyramidis habebitur, si quadratum e radio basis tollatur e

quadrato lateris: $La =$

tus enim reliqui per 5

e 12 erit altitudo, ut in

subiecto exemplo.

Hic area trianguli

$62 \frac{4}{15}$ est basis pyra-

midis: Altitudo est

$9 \frac{1}{5}$, quia per 4 e 18,

latus potest triplum

radii: At si de 144

quadrato 12 lateris tollatur subtripulum, id est 48, reliquum 96 per 5 e 12 erit

altitudinis quadratum, quadratique latus erit $9 \frac{1}{5}$. Tertia autem pars $3 \frac{1}{5}$, ex

qua & basi pla-

n^o erit $203 \frac{11}{15}$

Sic in exemplo

sequente quadra-

tum 36 radii 6 tol-

latur a quadra-

to $292 \frac{1}{5}$ la-

teris $17 \frac{1}{4}$, reli-

qui $256 \frac{1}{5}$ la-

tus erit $16 \frac{3}{4}$.

Pro altitudine,

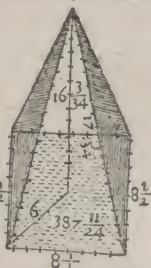
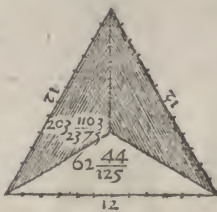
cujus tertia $5 \frac{3}{10}$, & basi $72 \frac{1}{4}$ erit $387 \frac{11}{24}$. Si pyramis sit curta, metire totam, &

partem quæ deest, tum a tota detrahe quod defuerat: ut hic. Sit 40 latus toti-

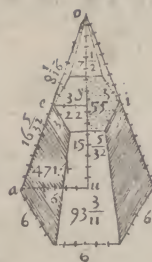
us $16 \frac{5}{8}$, eo latus particularis $8 \frac{1}{2}$, erit igitur perpendicularis totius $15 \frac{2}{3}$: ter-

tia pars $\frac{5}{8}$, ex qua & basi $93 \frac{1}{4}$ planus erit 471 pro tota pyramide. At in mino-

re pyra-

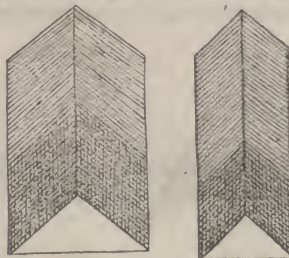


re pyramide à quadra
to lateris $65\frac{1}{25}$ subla
to quadrato radii 9:
reliqui $56\frac{1}{25}$ latus fe
re $7\frac{1}{2}$ pro altitudine,
cujus tertia pars fuit
 $2\frac{1}{2}$: basis fere 22, ex
qua & tertia illa parte
planus est 55 pro soli
ditate minoris pyra
midis, qua deducta
de majore reliquum 416 erit pro curta pyramide. Hoc modo curtum prismat
metieris. Et



2. Prismata homogenea & equalia sunt ut bases. 29.30.31.32 p 11.

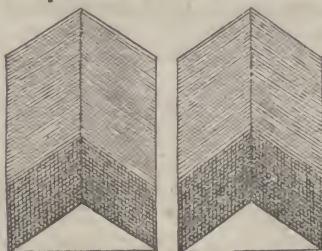
Cum nempe sint
æquemultiplicia
pyramidum. Ho
mogenea autem
requiruntur, quia
pentaedrum cū
hexaedro non i
ta conveniret.
Confectarium
est 12 c 4.



Et

3. Si reciprocantur basi & altitudine, sunt equalia. 34 p 11.

Cō
se
sta
ri
um
é 13
c 4.

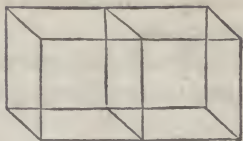


Et

4. Si prismata secantur plano oppositis hedris parallelo, segmenta sunt ut bases. 25 p 11.

Quia

Quia seg-
menta sunt
prismata
homoge-
nea. Itaque
cum sint æ-
quealta, al-
titudine nempe secantis plani, erunt ut bases, & hic bases sumenda sunt oppo-
sitæ altitudini.

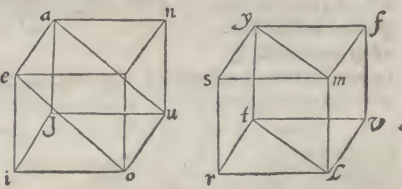


6. *Prisma est pentaedrum aut e' pentaedris compositum.*

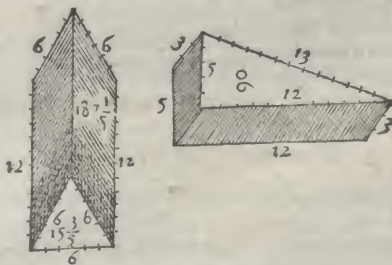
Partitio ut antea qualis fieri potuit, & hic solutio compositionem ostendet.

7. *Si pentaedra alterum basis triangulæ, alterum parallelogrammæ ad triangulam duplæ sunt æquealta, sunt equalia. 40 p II.*

Causa est brevis, quia dimidia sunt ejusdem prismatis: ut hic prisma per diagonios oppositorum laterum bisectione intelliges. Euclides ita demonstrat. Sinto pentaedra $aeiou$ & $ysrlm$ æquealta, primum basis triangulæ eio , secundum parallelogrammæ sl duplæ ad triangulæ, utrumque vero duplicetur & ab solvatur, ut primum sit $aeiou$, secundum $ysrlm$. Jam ex thesi basis sl duplæ est basis eio , cujus etiam duplæ est basis eo per 4 c 6 e 10. Itaque bases sl & eo æquantur, ideoque cum prismata ex thesi hic sint æquealta, ut bases ex conclusione æquales, prismata erunt æqualia, ideoque & ipsorum dimidia æqualia $aeiou$ & $ysrlm$, quæ proposita fuerant. Prismatis vero pentaedri geo-



dælia jam dicta generaliter, res e' duobus subjectis pentaedris intelligatur. Planus ex 18 perimetro basis triangulæ & 12 altitudine est 216, qui additus basi triangulæ $15\frac{1}{3}$, id est fere $\frac{1}{3}$ bis assumptæ, id est $32\frac{1}{3}$ componit $247\frac{1}{3}$ summam totius superfici ei: At planus ex eadem basi $15\frac{1}{3}$ & altitudine 12 est $187\frac{1}{3}$ pro tota soliditate, sic in secundo prismate pentaedro, qui cuneus ex acumine dicitur, & qui proprie à secundo prismate diceretur, superficies tota est 150, soliditas erit 90.



8. *Prisma*

prisma
Et

Et

Et

11. Quia

8. *Prisma e' pentaedris compositum est hexaedrum aut polyedrum, hexaedrum parallelepipedum aut trapezium.*

Partes suis nominibus intelliguntur: & partitio est superiorum similis.

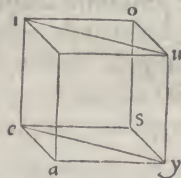
9. *Parallelepipedum est cujus opposita plana sunt pallelogramma. e' 24 p II.*

Itaque parallelepipedum in solidis respōdet parallelogrammo in planis. Hic enim hedra opposita sunt parallelæ, illic opposita latera sunt parallela. Itaque

1. *Bifecatur plano per diagonios oppositorum laterum. 28 p II.*

Respondet 34 p I.

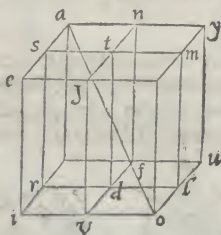
Esto prisma e' sex
basibus $ai, yo, ye,$
 ui, ri, au , diagonii
bifecant per $z c \phi e$
10 oppositas ba-
ses, & reliquæ op-
positæ bases duo-
rum prismatū dis-



sectorum per z æquantur. Quare duo prismata comprehenduntur à basibus æqualibus multitudine & magnitudine: Itaque æqualia. Et

2. *Si bifecatur duobus planis bifecantibus opposita latera communis bifectio & diagonius, inter se bifecantur. 39 p II.*

Quia hic dia-
metri (qualis
est illa bifectio)
inter se bifecan-
tur, ut in exem-
plo. Esto paral-
lelepipedū e' io
 uy bifectū à du-
obus planis bi-
fecantibus op-



posita latera: duo plana $srlm$ & $uyvf$. Hic communis sectio tsl & diagonius u bifecantur inter se.

10. *Si tres rectæ sunt proportionales, parallelepipedum mediæ aquatur æquiangulo parallelepipedo omnium. e' 36 p II.*

Consectarium e' $3 c 5 e$, quod nos admonuit antea in planis generaliter verum esse de parallelogrammis, quod reſtangulis duntaxat erat attributum.

II. *Parallelepipeda reſtangula octo complent locum solidum.*

Id respondet in planis parallelogrammo reſtangulo, utque illic anguli plani reſti quatuor complent locum planum, ita hic octo solidi anguli complent lo-
cum so-

cum solidum, neque magis hic proprium cubo quam fuit antea quadrato: unde Aristotelis geometria illa emendatur.

12. *Figuratus parallelepipedum rectanguli appellatur solidus, factus a tribus numeris. 17 d 7.*

Ut si multiplices 1. 2. 3. facies 6 solidum: item si multiplices 2. 3. 4. facies 24 solidum, & latera solidi 6, erunt 1. 2. 3: solidi 24, erunt 2. 3. 4. Sic in planis planus absolute appellatur, ut hic solidus.

Itaque

2. Si duo solidi sunt similes, habent proportionalia latera & duos medios proportionales. 21 d 7. 19. 21 p 8.

Consecutarium est e 5 e 22. fiunt autem medii proportionales e lateribus similibus, secundo, tertio, quarto: Item tertio, quarto, quinto. Ut hic vides.

2. 3. 5. 4. 6. 10.
30. 60. 120. 240.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXIIII.
de cubo.

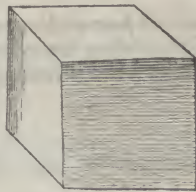
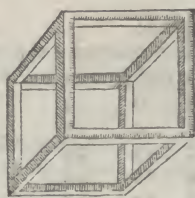
Parallelepipedum rectangulum est cubus aut oblongum.

Partitio respondet in planis partitioni parallelogrammi rectanguli in quadratum & oblongum, quin tota haec differentia communis est planorum & solidorum, tantumque quadrati & cubi nomina distincta sunt. Nam in planis aequae & solidis dicuntur oblongum, rhombus, rhomboides, trapezium.

2. *Cubus est rectangulum isoedrum. 25 d 11.*

Ut hic. Definitio respondet quadrati definitioni: utraque enim figura est re-

ctangula & rectitermi-
na: sed termini in qua-
drato latera dicuntur,
in cubo dicuntur he-
drae, quae tamen late-
ribus, etiam definiuntur.
Ergo ut differentiae cor-
porum generales a gene-
ralibus superficierum dif-
ferentia plano obli-



quo: sic modo speciales a specialibus assumuntur. Corpus planum quod comprehenditur a planis superficiebus. Corpus cubicum quod a quadratis comprehenditur, sed nomen generi defuit, quo proprie corpus planum diceretur, speciei huic proprium nomen factum est cubus. De cubo mysterium est quoddam apud Vitruvium in proemio lib. quinti, quod illic perlegito.

Itaque

1. *Cubi latera sunt duodecim, anguli plani vigintiquatuor, solidi octo.*

u 2

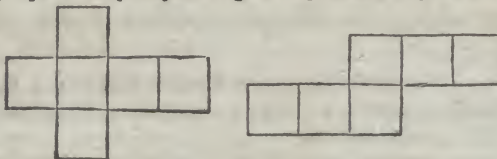
Hoc item

Item est scholio ad finem 15 lib.

Itaque

2. Si sex quadrata equalia solidis angulis componantur, comprehendunt cubum.

ut
hic
in
duo
bus
ex
plis.



3. Si quadrati angulis perpendiculares lateribus aequales sublimine connectantur, comprehendunt cubum. e 15 p 11.

Confectarium est e proximo superiore confectario, sex enim quadrata tum connectentur.

3. *Diagonius cubi potest triplum lateris.*

Nam diagonius quadrati potest duplum lateris per 3 c 5 e 12, & diagonius cubi potest & latus & diagonium quadrati per idem: potest itaque triplum lateris.

4. Si quatuor rectarum continue proportionalium prima sit dimidia quarta cubus, prima erit dimidius ad cubum secunda. e 33 p 11.

Confectarium est e 15 c 1 e 4, unde problematis deliaci est solutio ab Hippocrate primum deprehensa, ut in proemio plenius actum est. At duarum mediarum mesographus ab Herone fuit. 8 e 13.

5. *Solidus cubi etiam cubus dicitur, solidus nempe equalium laterum.* 19 d 7

Itaque

Fit a numero in suum quadratum multiplicato.

Sic efficitur cubus multiplicando numerum per seipsum & factum per primum: quales sunt a primis novem notis arithmetis primi novem cubi.

1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Hæc generalis est inventio cubi & geometrica & arithmetica, specialis inventio varia est in Euclide e continue proportionalibus numeris & e cubis ipsis, unde repetito, si quidem fructum tantæ subtilitatis agnoveris. *Analys quadrati lateris*

lateris proprium Theorema in Euclide habuit: analysi cubi non habuit: analogiam tamen hic sequi licet, & alteram geometricae analyseos utilitatem proferre: propositio per analogiam sic erit.

6. Si recta secetur in duo segmenta, cubus totius aequabitur cubis segmentorum & duplici solido ter comprehenso à quadrato sui segmenti & reliquo segmento.

Ut latus 12 secetur in 10 & 2 cubus 1728 ex toto 12 aequabitur duobus cubis 1000, & 8, è segmentis 10 & 2, & duplici solido, quorum primus 600 ter comprehenditur à 100 sui segmenti quadrato & à 2 reliquo segmento, secundus 120 ter item comprehenditur à 4 sui segmenti quadrato & à 10 segmento. sed rem totam genesis totius cubi facilius declarabit, quomodo nempe extremi & inter medii solidi generentur. fiat igitur cubus è tribus aequalibus lateribus 12, 12, 12, atque in primis secundum latus primo multiplicetur sic.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ \hline 144 \\ 12 \\ \hline 1728 \end{array}$$

Productas notas ne addito, sed singulas per reliquum latus multiplicato, & multiplicatas addito separatim sic.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ \hline 144 \\ 12 \\ \hline 1728 \end{array}$$

Itaque

Latus primi cubi singularis est alterum latus secundi solidi, ejusdemque lateris quadratus est alterum latus primi solidi, cujus reliquum latus est latus secundi cubi, ejusdemque reliqui lateris quadratus est reliquum latus secundi solidi.

In ista igitur æquatione quatuor solidorum cum uno solido considerabis peculiarem generem & compositionem, primum ut cubus ultimus fiat ex ultimo segmento 2, tum ut secundus solidus à 4 quadrato sui segmenti & 10, & reliquo segmento ter comprehendatur: Denique ut primus solidus à 100 quadrato sui segmenti 10, & reliquo segmento 2, ter item comprehendatur: postremo ut cubus 1000 fiat è majore segmento 10. Ex hac igitur generi analysis contraria deducitur è mutua cuborum cum solidis colligatione, qualis in quadratis

u 3 dicta

dicta est. Hic enim tametsi de solido agitur, attamen duo latera spectantur, quia alterum compositum & planum est. primi igitur cubi 1000 latus 10, est clavis ad duos solidos, & cubum sequentes aperiendum. Est enim alterum latus secundi solidi, quippe comprehensum ab eo & secundi segmenti quadrato. Est enim ejusdem lateris 10 quadratus 100, latus alterum primi solidi 600, comprehensum nempe ter ab hoc quadrato 100, & reliquo segmento 2: est etiam reliquum primi solidi latus 2 latus sequentis cubi: ac postremo ejusdem lateris 2 quadratus reliquum latus secundi solidi. Hoc igitur velut Ariadnes filo tam variis laterum errores explicantur, ut in quadratis fuit. Nam cum latera singularium cuborum inveneris, latus etiam cubi totius inveneris: tametsi enim cubus universus est major cubis partium: attamen latus universum est æquale interius singularium cuborum, & solidis intermediis duntaxat utimur ad cubi sequentis latus inventiendum. Quaratur igitur latus cubi 1728. Primum notabis punctis ultimum & millenarium, deinde quemcunque locum, sic 1728; Deinde cubi maximi in primum punctum desinentis inveni latus cubicum, hic erit 1: seorsum nota 1, & lateris cubum tolle de numero desinente in idem punctum, nihil manebit, sic 1728(1: Hoc primum singularis cubi latus est. Secundo latus idem triplicetur, fient 3, primum latus secundi solidi. Hic numerus triplus dicitur, subjiciturque eidem solido sic.

$$\begin{array}{r} 1728 \\ 3 \end{array} \quad (1)$$

Item latus quadretur, erit 1, & cum quadratum fuerit triplicetur, erit 3: primum latus primi solidi, & divisor dicitur, eidemque solido subjicitur, sed inferius, ut à triplo sejungatur sic.

$$\begin{array}{r} 1728 \\ 3 \end{array} \quad (1)$$

Idem etiam divisor habetur multiplicatione quoti per triplum, quia solidus idem est quocunque ordine tria ejus latera multiplicentur. Per inventum divisorem divide primum solidum, emergit 2 reliquum ejusdem primi solidi latus. Atque latus hoc reliquum, quia sequentis cubi latus est, cum superioris cubi latere deinceps adnota, & per quotum 2 multiplica 3 divisorem, facies 6 subjicienda divisoni. Postremo idem latus 2 quadretur, fiet 4 reliquum latus secundi solidi: 4 igitur per 3 triplum multiplicatis fiunt 12, item subjicienda secundo solido.

solido. Denique 2 latus cubi cubatum facit 8 subjicienda sequenti puncto: ad de tres summas, facies 728, quibus subductis nihil manebit, sic.

$$\begin{array}{r} 1728 \quad (12 \\ 3^2 \\ 4^4 \\ 3^3 \\ 6 \\ \hline 128 \\ 728 \end{array}$$

Quod si cubi singulares duobus plures fuerint, latera præcedentia pro unico sumuntur: ut si quærat latus cubi 34012224, notabis locis cubicis, latus primi cubi erue, sic.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 34012224 \quad (3 \end{array}$$

Denique secundi singulatis sic eruatur.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7244 \\ 34012224 \quad (3^2 \\ 9^4 \\ 474 \\ 8^4 \\ \hline 368 \\ 5768 \end{array}$$

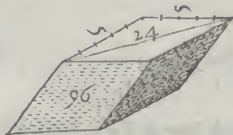
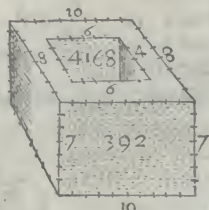
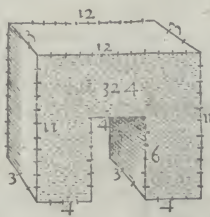
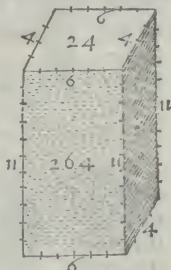
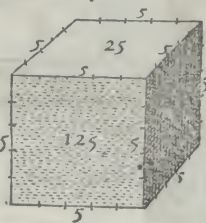
Hic igitur cum duo latera sint tanquam unicum triplicandum & triplum subjiciendum secundo solido: eadem duo latera velut unicum quadretur, quadratumque triplicetur, fient 3072 primo solido pro divisore subjicienda: per hunc divisorem divide primum solidum, quotus erit 4, per quem multiplicato divisorem 3072, facies 12288. Postremo quadra 4 quotum, fient 16: iis multiplicata triplum 96, fient 1536 subjicienda triplo. Tandem etiam quotum cubatum id est

id est 64 subijce puncto sequenti, & tres summas addito, & subducito, nihil manebit, sic.

$$\begin{array}{r}
 1244 \\
 3402224 \\
 864 \\
 26 \\
 \hline
 3072 \\
 2288 \\
 2536 \\
 64 \\
 \hline
 2244224
 \end{array}$$

Aliquando post cubicum latus jam repertum, locis proximis neque solidus est ullus, neque cubus. Itaque tum lateri invento, circulus adscribendus est, ut in cubo 8120601 (201. Si secundum latus primi solidi sit majus latere sequentis cubi, solidus divisus partem secundi solidi complectebatur, ideoque minuentum latus illud est, ut in cubo 17576, primum latus erit 2, secundum, si feceris 7, ut videtur initio fieri posse, facies primi solidi secundum latus majus latere sequentis cubi. Itaque latus illud minuatur, & pro 7 sume 6, latus legitimum produces, analysis tota erit 17576(26. Hæc via generalis est & communis ad quamlibet magnum cubi latus retexendū. Sic in cubo 312908547069 latus invenietur 6789. In partibus est quoque cubi ratio. Nam si propositus numerus cubus nō est, nullū est ejus in numeris verum latus, cubi tamen in eo maximi verum latus erui potest: ut in 17616 cubus continetur 17567, & latus ejus est 26, & supersunt 40. Latus itaque numeri non cubi nullum tam accuratum reperietur unquam, quin accuratius inveniri possit: ut de quadrato jam dictum est, duoque item hæc modi sunt cubicum latus vero propinquum inquirendi, quales etiam in quadrato ante declarati sunt. Primus modus subducit duos solidos & ultimum cubū in proximo majore cubo comprehensos, quo intelligatur duorum continuorum cuborum distantia, sicut antea duorum quadratorum distantia intellecta est. Huc enim cubicus gnomon quidā recurrit, quem cōcipis ē tribus planis cubi, uti gnomonē quadrati ē duobus quadrati lateribus. Sic in exemplo 17616, ubi latus est 26, & supersunt 40, sequētis cubi. Divides 27 in 26 & 1, & ut antea didicisti solidos hinc & cubū facies, primus solidus comprehendetur ter ā 676 quadrato segmenti 26 & 1 reliquo segmento. Itaque erit 2028: secundus comprehenditur ter ā quadrato 1, & reliquo segmento 26, & erit 78. Cubus autem 1 est 1: adde igitur illos duos solidos, & hunc cubum, habebis 2107 pro nomine reliqui 40. Itaque latus 17616 est $26\frac{40}{2107}$, quo intelligitur, ut antea in quadrato, quantum numerus 40 abest ā nomine 2107, tantum cubum propositum abesse ā proximo majore. Itaque si numeratorem 40 tollas ā nominatore 2107, & reliquum 2067 addas 17616,

das 17616, totus erit 19683, cubus lateris 27. Secundus modus est per partes magni cuiusdam nominis sed cubicas, ut earum latus jam certum sit, ut numerus idem 17616 reductis ad centesimas cubicas, id est ad 1000000 facit 17616000000, cujus numeri latus est 2601 pro numero datarū cētesimarū, sic $\frac{2601}{100}$, id est 26 $\frac{1}{100}$ & supersunt 19712199, quæ necentessimam quidem invento lateri possunt addere, quia differentia cubi proxima majoris major est, ideoque reliqua illa despiciuntur. Atque hæc de cubo: de reliquis autem parallelepipedis, oblongo, rhombo, rhomboide, deque trapezio & polyedris, pentaedris stereometra præcipua nulla est. Prismatis geodæsia est exposita prius, exemplis tantum specialibus opus est, ut hic. Planus est basis perimetro 20 & altitudine 5 est 100. Additis utrique basi 25 & 25, id est 50, totus est 150 pro tota superficie. Planus vero est basis 25, & altitudine 5, est 125 pro tota soliditate: sic in oblongo, planus est basis perimetro 20, & altitudine 11 est 220, qui additus basibus 24 & 24, id est 48 componit 268, pro tota superficie. At planus est basis 24 & altitudine 11 est 264 pro soliditate. Atque eadem geodæsia erit in dimetiendis parietibus rectangulis vel portis aliqua fenestra, aut cavitate vacuis, si vacua ipsa detrahantur, ut hic vides. In proximo exemplo spissitudo est 3 pedum, latitudo 12, altitudo 11: tota itaque soliditas est 396. ac porta est spissitudinis 3 pedum, latitudinis 4, altitudinis 6, soliditasque porta 72 pedū, quibus subductis à toto pariete restant 324 pro reliquo parietis corpore. In secundo exemplo longitudo pedum 10, latitudo 8, altitudo 7, faciunt totius corporis 560 pedes: Cavitas longitudinis 6, latitudinis 4, altitudinis 7 facit 168, quibus subductis de 560, reliqui summa est 392. Sic amplissimi ædificii parallelepipedos parietes, murosque omnes metiri liceat. Eadem geo-



dem geodasia est in rhombo, rhomboide, trapezio, & quolibet multangulo: basis metienda est ut prius, tum ex ea & altitudine soliditas constabit: ut in rhombo basis 24 altitudinis 4 soliditas est 96, in rhomboide basis $64\frac{1}{2}$, altitudinis 11, soliditas $1028\frac{4}{11}$.

Eadē

geoa-

dasia

deni-

que

trape-

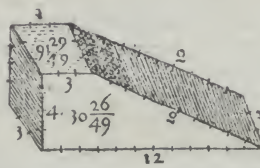
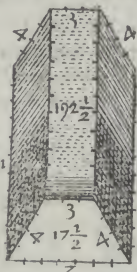
zii: ut

in ca-

xem-

plis.

Super-



ficies primi est 198, soliditas $192\frac{1}{2}$. Superficies secundi est $148\frac{3}{4}$, soliditas $91\frac{2}{4}$.

Eadem

& prisma

tis polye-

dri geo-

desia erit:

Ut hic vi-

des in o-

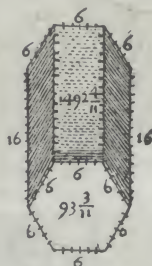
ctaetro

basis se-

xangula.

Superfi-

cies erit



$762\frac{6}{11}$, soliditas $1492\frac{4}{11}$.

Atque hinc va-

forā qualibet

plana solidita-

tis specie figura-

torū capacitas

estimari po-

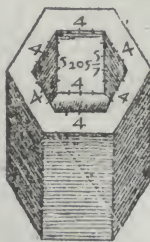
test: Ut hic vi-

des. Hic enim

planus ē basi

sexangula $41\frac{1}{2}$:

radius enim est



latus per 6 ē 18, & altitudine 5 erit $205\frac{1}{2}$. Itaque si pes cubicus contineat 4 quar-
tas ut Parisienses loquuntur, vas continebit quartas $822\frac{6}{7}$, id est fere 823.

P. R A M

Polyedrum mistum ordinatum est pyramidatum compositum e pyramidibus vertice coeuntibus in centro, & sola basi eminentibus.

Pyramidati primum genus in prismate ita fuit: dicatur polyedrum mistum ordinatum separatim a pyramide & prismate: quia neutrius definitio ei convenit. Pyramis ab una basi fastigiatur, mistum non item. Prismatis opposita plana sunt aequalia, similia, parallela, hoc convenit. At reliqua plana prismatis sunt parallelogramma, quod neque octaedro, neque icosaedro, neque dodecaedro convenire potest, cum plana octaedri & icosaedri sint triangula, dodecaedri sint quinquangula. Quare neque pyramis neque prisma hic dici potest, pyramidatum tamē est e pyramidibus vertice (ut e geodasia mox intelligetur) coeuntibus in centro, & sola basi eminentibus, neque tamen propterea dixeris talibus pyramidibus inordinatis compleri locum, neque enim omnimodo sumptae compleant locum. Atqui e polyedris mistis ordinatis Euclides triaduntaxat haec ordinata sibi proposuit, quae & nobis sunt proposita. Cum igitur pyramidatum mistum ordinatum ita componatur e pyramidibus, geodasia ipsius erit e geodasia pyramidum componentium: basisque una per numerum omnium basium faciet corporis superficiem, & pyramis una per numerum omnium pyramidum multiplicata faciet soliditatem.

2. *Altitudo componentis pyramidis habetur per radium circuli basi circumscripti, perque polyedri semidiagonium.*

Basis pyramidis patet oculis, altitudo intus latet, invenitur autem per triangulum rectangulum, cuius basis est semidiagonius, crura radius circuli & perpendicularis altitudinis. Itaque sublato radii quadrato de quadrato semidiagonii, latus reliqui per 5 e 12 erit altitudo: sed radius circuli specialem inventionem per species basis triangulae primum, deinde quinquangulae habebit.

3. *Mistum ordinatum est triangulae basis aut quinquangulae.*

Partitio est e subiectis basibus.

4. *Si quadratus e latere triangulae basis trifariam dividatur, latus trientis erit radius circuli basi circumscripti.*

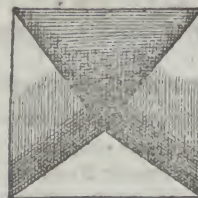
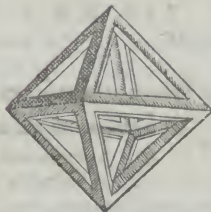
Ut patet per 7 e 18. Atque haec radii circularis inventio est pro octaedro & icosaedro.

5. *Mistum ordinatum triangulae basis est octaedrum aut icosaedrum.*

6. *Octaedrum est polyedrum mistum ordinatum, quod ab octo triangulis comprehenditur. 27 d II.*

x 2 Ut hic

ut
hic vi
des
mo/
no/
gram
mum
& so=
lidū.



Itaque

1. Octaedri latera sunt 12, anguli plani 24, solidi 6.

Hoc item est de scholio ad finem 15 lib.

Et

2. Octaedra novem complent locum solidum.

Quadruplex enim angulus tetraedri æquatur triplici octaedri, & dodecuplex ideo nuncuplici. Itaq; novem anguli octaedri valent octo solidos rectos. Est ita Potamonis demonstratio ex angulis consentanea Euclidis demonstrati-
oni, item ex angulis quod quinque tantum solida sint ordinata demonstranti octaedrū solidi loci completivum efficiet contra Aristotelē: utque in planis, sic in solidis triplex figura complebit locum.

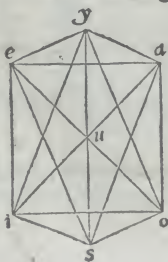
3. Si triangula octo æquilatera & æqualia solidis angulis componantur, comprehendunt octaedrum.

Hac vero
fabrica faci-
lis est, ut pa-
tet in subje-
cto exēplo:
ubi uides tā
quam du-
plices penta-
edri duo tri-
angula æquilatera æqualia intersecari.



7. Si recta centro quadrati utrinque perpendicularis æqualis semidiametro connectatur cum angulis, comprehendet octaedrum. 14 p 13.

Nam per
pendicu-
laris yu &
su cum se-
midia-
goniis ua, u
o, ut, ue,
æquabit
per 2. e 7
octo late-



rayd, ye

ray 4, ye, yo, yi, se, si, sa, so: octoque triangula.

Itaque

1. Diagonus octaedri potest duplum lateris

Ut patet per 5 e 12.

Et

2. Si quadratum de latere octaedri duplicetur, duplicati latus erit diagonus.

Ut in subiecto exemplo latus est 6 quadratum 36, duplicatum 72, cuius la-

tus $8\frac{6}{7}$ est diagonus. Atq;

hinc existet geodesia octae-

dri. Semidiagonus enim

est $4\frac{4}{7}$: cuius quadratum

est $17\frac{27}{49}$: & quadratum de

6 latere trianguli æquilate-

ri potente per 4 e 18-triplū

radii est 36, æque 12 triente

latus $3\frac{3}{2}$ est radius circum-

scripti circuli. Quare subla-

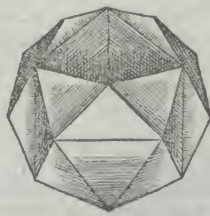
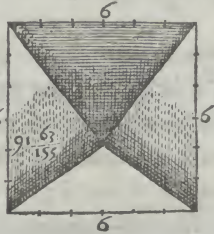
to quadrato 12 de quadrato $8\frac{6}{7}$ restabunt $5\frac{27}{49}$ quadratum perpendicularis

cuius latus $2\frac{1}{2}$ est ipsa altitudo perpendicularis, cuius pars tertia est $\frac{1}{3}$ quæ per

$15\frac{1}{3}$ basim triangulam faciant $11\frac{67}{153}$ pro octava pyramide, quæ multiplicata

per 8 facit $91\frac{61}{153}$ pro toto octaedro.

8. Icosædron est polyedron mistum ordinatum à viginti triangulis comprehensum. 29 d II.



Itaque

1. Icosædri latera sunt 30, anguli plani 60, solidi 12.

Confectarium est item è scholio ad finem 15 lib.

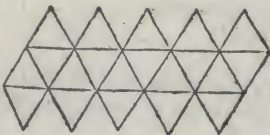
Et

2. Si viginti triangula ordinata & equalia solidis angulis componantur, comprehendent icosædron.

x 3

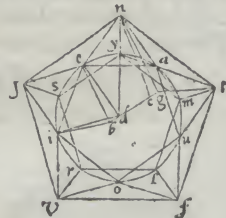
Fabrica

Fabrica au-
tem hæc
prompta
est, ut è sub-
secto exem-
plo perspi-
citur.



9. Si ordinata quinquangulum duplex & decangulum unum eidem circulo sic inscribantur, ut latus utriusque quinquanguli subtendat duo latera decanguli, sex rectæ circulo perpendiculares & radio ejus æquales, quinque ab angulis alterius quinquanguli connexæ & inter se, & cum angulis reliqui quinquanguli, sexta à centro utrinque continuata latere decanguli, & connexa illic cum quinque perpendicularibus, hic cum angulis secundi quinquanguli comprehendunt icosædrium. é 15 p 13.

Fient enim viginti triangula æquilatera & æqualia. Esto igitur quinquangulum duplum primū $aeiou$, secundum $ysrlm$, quorū latus quodlibet subtendat duo latera decanguli, nēpe $utym$, subtendat ya & am , tum sunt perpendiculares quinque ab angulis secundi quinquanguli ys, jr, lv, mf, nt . & connectantur primo inter se per connectentes nj, jv, vf, ft, tn . secundo cum angulis primi quinquanguli per connectentes $ne, ej, ji, iv, vo, of, fu, ut, ta, an$. Sexta à centro d sit bg radius dc continuatus utrinque latere decanguli cg & db connexa supra cum perpendicularibus, ut per connectentes ng, tg , infra cum angulis primi quinquanguli, ut per connectentes be, bi , & cæteri locis similiter, omnesque planis compleantur. Hoc dico icosædrium esse, & à viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehendī. Primo intermedia decem triangula perpendicularibus omīssis æquilatera esse & æqualia unum demonstrabit, ut $na t$. Nam mt & yu (quæ sunt perpendiculares) sunt etiam per se & z parallelæ, & ex thesi sunt æquales. Itaque per se & z & nt æquatur ipsi ym lateri quinquanguli: item na per se & z potest erui ny & ya , id est per fabricam latera sexanguli & decanguli, & per conversam 9 & 18 est latus quinquanguli: Idem erit $de at$. Quare $na t$ est æquilaterum: idemque de reliquis novem intermediis $nae, ne j, ej i, jiv, iv o, vof, fou, fut, uta, tan$. Similiter & de quinque superis triangulis probabitur ductis rectis dy & cn , quæ ut prius (quæ connectunt æquales parallelas ipsas dc & yn) erunt æquales. At dy est latus sexanguli. Itaque cn latus idem erit sexanguli, & cg est latus decanguli. Itaque gn potens utrumque per se & z erit per conversam 9 & 18 latus quinquanguli, & similiter gt concludetur latus quinquanguli. Quare $ng t$ est æquilaterum, & quatuor reliqua similiter erunt æquilatera. Reliqua quinque infra triangula similiter modo



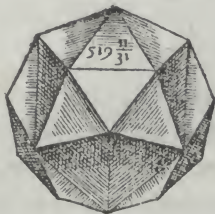
modo concludentur: unum igitur esto pro omnibus *ib* ductis radiis *di* & *de*. Nam *ib* potens ut prius latera sexanguli & decanguli latus erit quinquanguli, erit, & pariter *be* potens *de* & *db* latera sexanguli & decanguli, latus quinquanguli. Quare triangulum *ebi* est æquilaterum, & quatuor reliqua similiter ostenduntur æquilatera. Omnia igitur latera viginti triangulorum cum sint æqualia, erunt triangula ipsa æquilatera, & per *c* 6 & 7 æqualia.

10. *Diagonius icosaedri est irrationalis ad latus.*

Quartum est exemplum *ἀλλοιῶς* vel *ἀσυμμετρῶς*: primum fuit de diagonio & latere quadrati, secundum fuit de segmentis rectæ proportionaliter sectæ, tertium de diametro circuli & latere quinquanguli. Et

11. *Potest quintuplum circularis radii.*

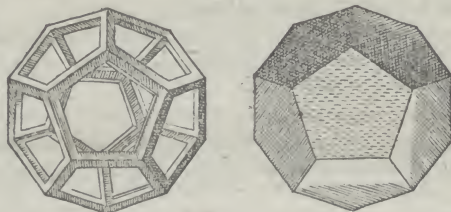
Nam per 8 & 18 continuata est latere sexanguli & decanguli secatur proportio-
naliter, & majus segmentum est latus sexanguli: ut hic bisecetur perpendicularis *a* in puncto *i*, tum *e*, id est minus segmen-
tum continuatum dimidio majoris, id est *ie* poterit per 5 & 14 quintuplum ejusdem dimidii *ie*. Itaque cum *io* dimidium diagonii possit quintuplum bisegmenti, diagonius tota poterit quintuplum totius bisecti. At qui hinc etiam erit geodesia icosaedri. Nam ad altitudinem pyramidis semidiagonius est latere decanguli & semiradio circuli: latus autem decanguli est recta sub-
tendens dimidiam peripheriam lateris quinquangularis, vel majus segmentum radii proportionaliter secti. Sic enim geometricè sumi potest, & pro sua mensura numerari. Ita-
que si quadratum est latere decan-
guli tollatur à quadrato est latere quinquanguli, relinquetur per 9
& 18 quadratum est latere sexangu-
li, id est est radio. Latus decangu-
li quia latus quinquanguli hic est
6, erit $3\frac{2}{3}$ recta nempe subten-
dens dimidiam peripheriam: semiradius autem sic habebitur. Quadrata quin-
quanguli & decanguli sunt $369\frac{639}{1125}$: & subtractione hujus ab illo reliquum
quadratum sexanguli per 9 & 18 est $26\frac{586}{1125}$, & reliqui latus pro radio est 5 & fe-
re $\frac{2}{7}$ semiradius igitur est $2\frac{2}{7}$: adde latus decanguli $3\frac{2}{3}$ cum $2\frac{2}{7}$, totum erit $5\frac{22}{21}$
pro semidiagonio icosaedri. Radius circuli triangulo circumscripti est per 7 &
18 idem qui prius $3\frac{1}{2}$ est quadrato nempe 12. Itaque si quadratum circularis ra-
dii tollatur à quadrato semidiagonii, relinquetur quadratum altitudinis & per-
pendicularis: quadratum semidiagonii est $35\frac{89}{1125}$ quadratum radii circularis
est 12, hoc ab illo sublatum relinquit $23\frac{689}{1125}$, cujus latus est fere 5 pro perpen-
dicula



diculari & altitudine proposita: unde jam pyramis æstimetur. Basis pyramidis triangulæ est $15\frac{1}{3}$. Planus ex hac basi & tertia altitudinis est $25\frac{3}{4}$ quibus per 20 multiplicatis summa icosaedri est $519\frac{1}{3}$. Hæc geodasia est icosaedri.

12. Polyedrum mixtum ordinatum quinquangulæ basis est quod à duo decim quinquangulis comprehenditur, & dodecaedrum dicitur.

Ut
hic



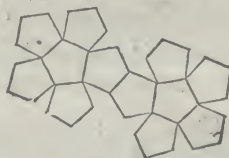
Utaque

1. Dodecaëdri latera sunt 30, anguli plani 60, solidi 20.

Hoc item est ex eodem illo scholio 15 lib.

2. Si duodecim quinquangula ordinata æqualia solidis angulis componantur, comprehendunt dodecaedrum.

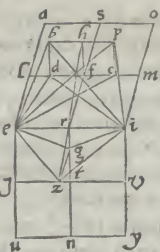
Ut
hic
videtur.



13. Si cubi latera rectis bisecentur, ternaque bisegmenta bisecantium in conterminis planis neque concurrentium neque parallelarum, duo unius tertium reliquæ vicinum proportionaliter ita secantur, ut minora segmenta bisecantem terminent, terna extra cubum dictis planis perpendicularares à proportionalium sectionum punctis, æquales majoribus segmentis connexæ duæ ex eadem bisecante inter se & cum vicinis cubi angulis, tertia cum angulis eisdem comprehendunt dodecaedrum. 17 p 13.

Sunto cubi duo plana pro omnibus, ut unum quinquangulum pro duodecim describatur, eaque contermina æi o & euyi lateribus bisecta per bisecantes sr, lm, rn, jv, tria que bisegmenta bisecantium lm & rn neque concurrentium neque parallelarum, duo ipsius lm nempe fl & fm, tertium reliquæ vicinum, id est lr, & quodlibet bisegmentum secetur proportionaliter in punctis d, c, g, ita ut minora segmenta terminent bisecantem nempe dl, cm, gr: denique sunt tres perpendicular

perpendiculares à punctis db, c, g , ipsæ d, cp, gz , duæque primæ connexæ inter se per bp , & cum angulis cubi per be & pi , tertia connexa cum iisdem angulis per z, e, xi , omnesque planis compleantur. Dico primum quinque latera bp, pi, iz, ze, eb , æqualia esse, quia singula sunt dupla ejusdem segmenti majoris. Ductis enim rectis de & eg , ig patebit de duobus, eodemque modo de reliquis. Primo igitur cd & bp æquantur per 6 e 21 & 6 c 12 e 5. Itaque bp est duplum majoris segmenti. Deinde tota fl secta proportionaliter & minus segmentum dl possunt per 6 e 14 triplum majoris fd , id est per fabricam db . Itaque le quæ est æqualis sectæ lf & ld possunt triplum ipsius db : at per 5 e 12 de potest le & ld . Itaque potest triplum ipsius db . Igitur utraque e & d & db potest quadruplum ipsius db ad be per 5 e 12 potest ipsas e & db , ideoque potest quadruplum ipsius eb , & per 7 e 12 est ipsius dupla. Itaque duo latera eb & bp æquantur, & eodem argumento æquantur pi, iz, ze . Quinquangulum igitur est æquilaterum. Dico quod est etiam planum, possit enim dici obliquum esse & in duobus planis situm. Esto igitur fh parallela ad ipsas db & cp , & ipsis æqualis, & ducatur recta hz , ipsa una erit per 10 e 7. Nam ut tota tr , id est rf est ad majus segmentum, id est ad fh , sic h , id est zg est ad gr , & bina crura fh, gr, fe, gz per 6 e 21 sunt alterne parallela. Itaque bases sunt continuæ. Patuit adhuc quinquangulum æquilaterum & planum factum esse: reliquum est ut æquiangulum probetur. Ducantur rectæ ep, ec , dico angulos pbe & exi æquari, quia crurum æqualium per fabricam bases pe , & ei habent æquales potentes nempe quadruplum ipsius le . Nam recta lf secta proportionaliter & aucta majore segmento df , id est fc , secatur iterum proportionaliter per 3 e 14, & per 6 e 14 tota & minus segmentum, id est cp possunt triplum majoris fl , id est ipsius le . Itaque el & lc , id est ec & cp , id est ep potest quadruplū ipsius el , & per 7 e 12 est dupla, & ipsa ei est item per fabricam dupla ejusdem. Itaque bases sunt æquales. Eodemque modo ductis id & ib concludetur tertius angulus bpi æqualis angulo exi . Itaque per 12 e 14 quinque anguli sunt æquales.



14. *Diagonus est irrationalis ad latus dodecaedri.*

Quintum est exemplum ἀλογίας & ἀσυνμετρίας: primum fuit de diagonio & latere quadrati, secundum de secta proportionaliter & ejus segmentis, tertium de diametro circuli & latere quinquanguli inscripti, quartum de diagonio & latere icosaedri: quintum modo est de diagonio & latere dodecaedri.

15. *Si latus cubi secetur proportionaliter, majus segmentum erit latus dodecaedri.*

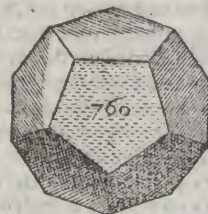
Id enim modo dictum est. Atqui hinc etiam est geodasia dodecaedri. Nam si subtendens angulum quinquanguli quadrata triplicetur, triplicatæ dimidiatum latus erit, semidiagonus dodecaedri, quia per 3 e 24 diagonus cubi, id est dodecaedri potest triplum lateris cubici. At si quadratum è latere decanguli tollatur de quadrato è latere quinquanguli, latus reliqui erit radius circuli

y quin

180 = 170

P. R A M I

quingūgulo circūscripti: Postremo si tollatū quadratū radii ā quadrato semidia-
gonii, reliqui lat⁹ erit perpendicularis altitudo. Ut si lat⁹ decāguli sit $7\frac{2}{3}$, quadra-
tum erit $57\frac{1}{3}$ triplicatum $173\frac{7}{3}$: latus fere $13\frac{1}{3}$ pro
diagonio dodecaedri. Itaque dimidiatum erit pro
semidiagonio dodecaedri $6\frac{1}{3}$. Radius circularis de
inceps invenietur sic. Si quadratum ē latere decangu-
li tollatur ā quadrato de latere quingūguli, latus
reliqui erit radius circuli per 9 & 6 c 18. Uthic latus
quingūguli est $4\frac{2}{3}$, latus decanguli $2\frac{2}{3}$, quadrata
autem sunt $21\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{3}$; hujus ab illo subductione relin-
quitur $16\frac{4}{3}$: cujus latus est $4\frac{2}{3}$ pro radio circuli. In
ventis semidiagonio dodecaedri & circuli radio restat altitudo. Tolle igitur cir-
cularis radii quadratū $16\frac{4}{3}$ ā semidiagonii quadrato $47\frac{1}{3}$, latus reliqui
 $31\frac{2}{3}$ est 54 pro altitudine, cujus una tertia est $\frac{2}{3}$. Basis quingūgula
est fere 38, quæ per $\frac{2}{3}$ facit $63\frac{1}{3}$ pro soliditate unius pyramidis, quæ per 12 facit
760 pro soliditate totius dodecaedri.



16. Solida plana tantum quinque sunt ordinata.

Quod patet ex anguli solidi natura per species planarum figurarum. ā duar-
bus planis angulis non comprehenditur angulus solidus, ex tribus angulis tri-
anguli ordinati est angulus tetraedri, ex quatuor octaedri, ex quinque icosa-
edri: ē sex non potest: nam sex plani tales anguli valerent 12 tertias recti, id
est quatuor rectos. At anguli plani facientes solidum sunt minores quatuor res-
ctis per 8 c 22: ē septem igitur & pluribus multo minus est possibile. E' qua-
dratis tribus angulis comprehenditur angulus cubi, ē quatuor non potest ob
eandem causam. E' tribus angulis quingūguli ordinati est angulus dode-
caedri, ē quatuor non potest: nam singuli valent rectum & unam quintam.
Itaque essent quatuor recti, & tres quinta. E' pluribus igitur multo minus est
possibile. Demonstratio hæc accurate sane & manifeste colligit, quamvis pla-
na ordinata innumerabilia possint esse, attamen ē generibus angulorum quin-
que tantum corpora ordinata institui posse, unde tetraedrum, octaedrum, i-
cosaedrum, basi triangula, cubus quadrangula, dodecaedrum quingūgula
componitur. Atque ita geometria Pythagoræ thelogiam quandam ex iis
quinque corporibus ordinatis reperit, tanquam mens illa summi dei sapientia
que de fabricando mundo & ordinatis corporibus exornando cogitans stereo-
metricam demonstrationis hujus ideam sibi proposuerit.

P. R A M I G E O M E T R I A E L I B. X X V I.
de sphaera.

Solidum gibbum est quod comprehenditur ā superficie gibba.
Sic antea planum ā superficie plana definitum est.

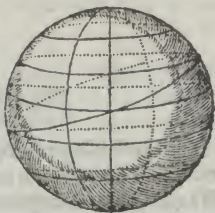
2. Estque

2. *Estque sphaera aut varium.*

Partitio solidorum est superficiebus suis intelligitur.

3. *Sphaera est gibbum rotundum.*

Potuit etiam
definiri quod
a sphærico cō-
prehenditur.
Corpus sphæ-
ricum, sphaera
græce, latine
globus appel-
latur; sed græ-
cum verbum
ulitatum teneatur.



Sphaera fit conversione semicirculi manente diametro. 14 d 11.

ut hic vides. Euclides hanc

sphaera fabricam proposu-

it, qualis antiquior est in

superficie, analogia tamen

respondet, & sphaeram sic

ri conversione semicirculi

intelligimus, dum concipi-

mus inane spatium (quo

semicirculus attigerit) cor-

porari. Atque ut antea de cir-

culo in planis deque sphærico in gibbis, sic modo intelligatur sphaeram in so-

lidis esse ordinatissimam.

4. *Maximus sphaerae circulus est, qui sphaeram bifecat.*

Hoc peripheriis sphæricis respondet ut proximum.

Circulus propior maximo major est remotiore.

Aequi distantes a maximo sunt aequales.

ut in superiore exemplo.

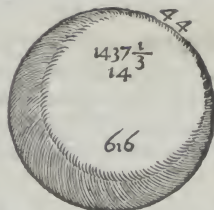
5. *Planus est diametro & sextante sphærici est sphaera.*

ut antea circulo & sphærico, sic modo cubo & sphaerae sua analogia est. Cu-

bica superficies comprehenditur sex basibus quadratis aequalibus, & sphaera

y z item

item cō-
prehen-
ditur
sex basi-
bus
sphæri-
cis equa-
libus cu-
bicas ba-
ses ambi-



entibus: Cubus efficitur multiplicata sexta parte basis per latus: & sphæra si-
militer efficitur multiplicata sexta sphærici parte per diametrum tanquam per
latus. Sic planus est $\frac{616}{6}$ & 14 diametro est 1437 $\frac{1}{3}$ soliditas sphære. Itaque

1. Ut 21 ad 11, sic cubus diametri ad sphæram.

Uthic cubus est 14 est 2744. facile enim fuit comparanti cubum 2744 cum
sphæra deprehendere 2744 ad 1437 $\frac{1}{3}$ esse in minimis terminis ejusdè rationis,
ut 21 ad 11. Ergo hæc geodasia est sphæra: de sphæra sectore & sectione geoda-
sia postea erit. Et

2. Planus est radius & sextante sphærici est hemisphærium.

Sed accuratius est sumere dimidium sphære.

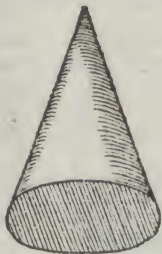
6. Sphære habent triplicatam rationem diametrorum. 18 p 12.

Sic antea dictum est circulos esse ut à diametris quadrata, quia essent plana
similia, & diametros in circulis esse, ut modo in sphæris, homologa latera. Ita-
que cum sphære figuræ sint similes & triplicis dimensionis, habent rationem
diametrorum triplicatam. Quantus vero sit usus propositionis hujus, astrono-
mia insigne exemplum suppeditat de differentia solis & terræ. Nam cum Ptole-
mæus diametros solis & terræ deprehendisset esse ut 11 ad 2 ex triplicata ratio-
ne sphærarum reperit rationem solis ad terram esse 331 ad 8, id est solem majo-
rem terra centies sexagies sexies & $\frac{3}{8}$. Copernicus (quia sol propius ad terram
accessit à Ptolemæi tempore, milliaria germanica 9976, id est gallica 20952)
deprehendit solem majorem esse terra centies sexagies sexies & $\frac{3}{8}$ ut prope se-
mel amplius superet.

7. Quinque corpora ordinata inscribuntur eidem sphære conversione
semicirculi habentis pro diametro in tetraedro rectam potentem sesquial-
terum ad latus tetraedri, in quatuor ordinatis reliquis ordinati ipsius dia-
gonium.

Corporum planorum ordinatorum adscriptio est in sphæram, ut superficiei-
rum planarum antea fuit in circulum: trianguli & ordinati triangulati quadrā-
guli, quinquanguli, sexanguli, decanguli, quindecanguli. Sedenim figuras
illas planas geometres inscripsit & circumscripsit circulo. Corpora autem quin-
que ordinata & polyedrum præterea stereometris sphære duntaxat inscripsit:
polyedrum.

Hic
ba-
sis
est
cir-
cu-
lus.



Itaque

1. Fit conversione trianguli rectanguli manente altero crure.

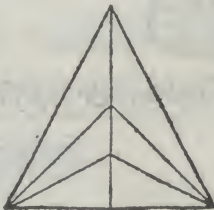
Ut patet nempe e variis definitione. Hanc conifabricam proponit Euclides 18 d 11: nec alium conum videtur tum stereometria percepisse. Apollonius conum generaliter tractavit, & species recti atque obliqui distinxit, ideoque propter conicam doctrinam altius extructam magnus geometra dictus est, ut Geminus est author apud Euthocium.

Et

2. Conus est rectangulus, si crus manens & aequale converso, obtusangulus si minus, acutangulus si maior. e 18 d 11.

Hic conicæ altitudinis differentia triplex proponitur e triplici angulorum differentia, qua dimidiati coni vertex distinguitur: differentia tamen optica

potius quam geometrica. Conus enim e minus videtur instar trianguli. Itaque pro differentia altitudinis apparet vertice rectangulo, obtusangulo, acutangulo: ut hic minimus conus est obtusangulus, me-



dius rectangulus, summus acutangulus. Causa vero triplicis differentiæ in angulis e differentia crurum est e consecutiis triplicis trianguli de recta bisecante basim, ut patet ad finem 8 lib.

Et

3. Conus est prima figura variarum.

Conus enim sic primus est in solidis variis, ut triangulum in planis rectilineis, ut pyramis in solidis planis, neque in alia solida varia simpliciora dividi potest.

Et

4. Coni

4. Coni æquealti sunt ut bases. Quæ est 11 p 12.

ut
hic
vi-
des.



5. Reciproci basi & altitudine sunt æquales. 15 p 12.

Con
secta
ria
sunt
é 12
& 13
e 4.
ut
hic
vi-
des.



5. Cylindrus est quod á cylindræo & oppositis basibus comprehenditur.

Hic
e
nim
circu-
li
duo
pa-
ralle-
li
sunt
ba-
ses circuli.



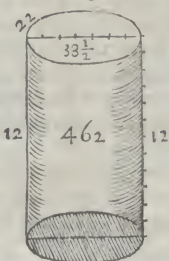
Fit conversione parallelogrammi rectanguli manente altero latere. 2 1 d 11.
ut patet ex eadem varii definitione.

itaque

Planus

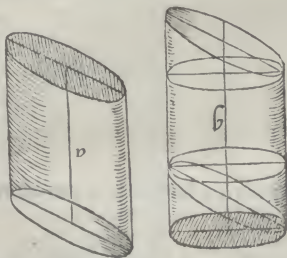
6. Planus e' basi & altitudine est soliditas cylindri.

Geodæsia
hic e' pris-
mate repe-
titur, ut si
cylindri.
basi sit
 $38\frac{1}{2}$ ex ea
& altitudi-
ne 12 soli-
ditas cy-
lindri est



462. Atque geodæsia respondet prismatis, omninoque parallelogrammi recti
guli geodæsia.

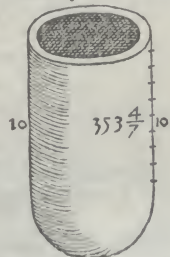
Sic cy-
lindri
basi.
oppo-
sitis sit
obli-
quus,
ampu-
ta de
basi al-
tera &



alteram tanto augeas, habebis mensuram totius, ut hic vides in cylindro a, b.

Hinc capacitas basis cylindræ æstimabitur. Inane enim tanquam plenum

metiendum est,
ut hic. Interioris
circuli diameter
6 pedum, peri-
pheria $18\frac{6}{7}$, area
igitur $28\frac{2}{7}$, ex
qua & altitudi-
ne planus est
 $282\frac{6}{7}$. Sic igitur
æstimabis, ut
antea quantum



liquoris vel contenti cujuslibet pes cubicus occupet.

7. Cylindrus est triplus coni basi & altitudine æqualis. 10 p 12.

De labyrintho Euclidæ demonstrationis ad hanc propositionem dicitur in
scholis. Ratio cylindri ad conum simpliciter potius assumatur e' ratione prisma-
tis ad

ris ad pyramidem. Cylindrus enim prismatis, ut conus pyramidis speciem imitatur: quin intra eadem latera prismata, cylindrusque pyramis & conus esse possunt: & si prisma pyramisque basis admodum multangula fuerint, eadem figura prismata & cylindrus, pyramis & conus videantur: denique intra eadem latera, ut conus cylindrique, sic prisma & pyramides ex axibus & diametris basium similitudinem habeant, tamque geometrica ratione postulabitur cylindrum coni triplum esse, quam postulatur cylindros & conos similes esse, quorum axes sunt diametris basium proportionales. Itaque

1. Planus est cylindri basis & triente altitudinis est soliditas coni basis & altitudine equalis.

E' triplicitate cylindri sequitur geodasia coni, ut antea geodasia pyramidis fuit est triplicitate prismatis. Altitudo autem habetur. Si quadratum est radio basis

tollatur a

quadrato

de latere,

latus reli-

qui erit al-

titudo, ut

patet per

5 e 12. Hic

igitur era-

dio 5 qua-

dratum 25

tollatur est quadrato 169 de latere 13, reliqui 144 latus erit 12 pro altitudine, ex

cujus tertia 4

& basi circulari

$78\frac{2}{3}$ planus est

$314\frac{2}{3}$ pro coni

soliditate. Ana-

logia autem co-

nici ad cylin-

draceum non

respondet, ut

subtriplum sit

conicum cylin-

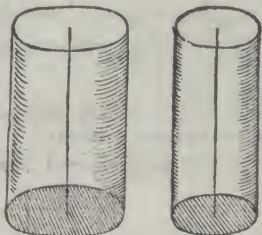
dracei, sicuti conus est subtriplus cylindri: est cono gemino basis communis fit rhombus archimedeus, ut hic, cujus geodasia est duobus conis erit.

2. Cylindri aequali sunt ut bases. 11 p 12.

Cylindracea forma sacci sunt, quibus fere frumentum portatur. Si quis igitur agricola saccum frumenti vicino commodarit, in cuius basi diameter sit 4 pedum, tandemque vicinus pro uno sacco reddat quatuor aequaltos, & in basi pedalis



pedalis diame-
tri videbitur
fortasse com-
modatum red-
didisse æquali
mensura, altitu-
dine videlicet
& basi. At ma-
gnam differen-
tiam quadrata

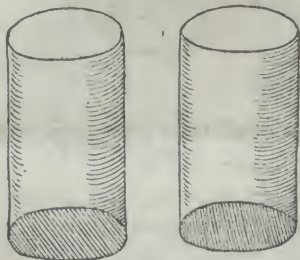


è quatuor singularibus diametris 1, 1, 1, 1, id est 4 ad quadratum 16 e 4 commo-
dati diametri. Circuli nempe sunt ut à diametris quadrata, per 2 e 15. Itaque
fraus esset 12, id est tripli.

Et

3. Reciproci basi atque altitudine sunt æquales. 15 p 12.

Hæc enim
utraq; af-
fectio figu-
ris prima-
rum æque
multiplici-
bus attri-
buita est.



Et

Si cylindrus secatur plano basibus oppositis parallelo, segmenta sunt ut axes. 13 p 12.

Ut hic vides. Axes enim
sunt altitudines. Consectari-
um item est è generali theo-
remate primarum figurarū,
sed paulo secus propositum
de altitudine, tanquam gene-
rale fuisset, Aequalis basis pri-
mas figuras esse, ut altitudi-
nes. Responder autem 4 c 5
e 23. Inæquales sectiones



sphæræ huc nobis rejectæ
sunt, quia comprehenduntur à superficie tum sphærica tum conica, ut sector:
item à plana & sphærica, ut sectio, & in utroque sicut in circulo segmentū ipsum
majus minusque dicitur, & sector in centro ut antea consideratur.

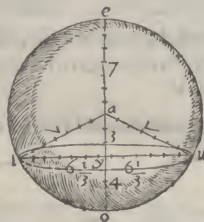
2 2 8. Sector

8. *Sector sphaerae est segmentum sphaerae, quod foris à sphaerico, intus à conico in centrum terminato comprehenditur, major concavo, minor convexo.*

Archimedi tales sectores sunt primo de sphaera, unde & geodæsia reliqua sumpta est, & hic analogia quædam est cum sectore circulari.

9. *Planus è diametro & sextante majoris vel minoris sphaerici est sector major vel minor.*

Ut hic è diametro 14 & $4\frac{2}{3}$ (quæ est una sexta sphaerici majoris) planus est $1026\frac{2}{3}$ pro soliditate majoris sectoris. Sic ex eadè diametro 14 & $29\frac{1}{3}$ quæ est $\frac{1}{3}$ de 176 minore sphaerico planus est $410\frac{2}{3}$ pro soliditate minoris sectoris. Atque hinc postremo soliditas sectionis oritur additione & subductione.



10. *Si major sector augeatur intermedio cono, totus erit major sectio: si minor minuatur, reliquus erit minor sectio.*

Ut hic conus intermedius dimensus est $126\frac{2}{3}$ additus sectori majori componit $2152\frac{2}{3}$: ac idem detractus minori sectori relinquit $284\frac{2}{3}$.

F I N I S.

BASILEAE, PER EVSEBIVM EPISCOPIVM,
& Nicolai fratris hæredes. Anno Salutis humane
M. D. LXIX.